Cvičenie č. 12

1. Nech D je acyklický digraf. Dokážte, že existuje vrchol $v \in D$, pre ktorý $\deg_D^I(v) = 0$.

2. Nech G je neorientovaný graf. Dokážte, že jeho hrany možno zorientovať tak, aby vo výslednom digrafe D platilo $|\deg_D^I(v) - \deg_D^O(v)| \leq 1$ pre každý vrchol $v \in D$.

3. Dokážte, že digraf D je acyklický práve vtedy, keď jeho vrcholy možno usporiadať do postupnosti $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tak, že $v_i v_j \in E(D) \Rightarrow i < j$.

4. Nech T je turnaj na n vrcholoch. Dokážte, že každý jeho podturnaj so 4 vrcholmi obsahuje tranzitívny trojuholník (t.j.trojicu orientovaných hrán xy, yz, xz).

5. Nech T je turnaj na n vrcholoch a nech $d_i = \deg_T^O(v_i)$ pre $i = 1, \ldots, n$. Dokážte, že T má práve $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{d_i(d_i-1)}{2}$ tranzitívnych trojuholníkov.

6. Dokážte orientovanú verziu Eulerovej vety: digraf D obsahuje orientovaný uzavretý eulerovský ťah práve vtedy, keďje súvislý a pre každý jeho vrchol v platí $\deg^I(v) = \deg^O(v)$.

7. Dokážte, že každý turnaj je buď silne súvislý, alebo ho možno zmeniť na silne súvislý zmenou orientácie jedinej hrany.

8. Dokážte, že každý turnaj obsahuje orientovanú hamiltonovskú cestu.

9. Nech G je konečný neorientovaný graf. Dokážte, že jeho hrany sa dajú zorientovať tak, aby vznikol silne súvisly digraf práve vtedy, keď G je súvislý a neobsahuje most.

10. Dokážte, že každý silne súvislý turnaj na n vrcholoch obsahuje cykly všetkých dĺžok od 3 do n.