

## Cvičenie č. 4

1. Určte  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$  pre Petersenov graf.
2. Určte  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$  pre graf  $n$ -rozmernej kocky.
3. Dokážte, že ak  $G$  je bipartitný graf, tak  $|E(G)| \leq \alpha_0 \beta_0$ , pričom rovnosť sa nadobúda práve pre kompletne bipartitné grafy.
4. Dokážte, že ak  $G$  je graf s  $n$  vrcholmi a  $m$  hranami, tak  $\alpha_0(G) \geq \frac{n^2}{2m+n}$ .
5. Dokážte, že graf  $G$  je bipartitný práve vtedy, keď  $\alpha_0(H) \geq \frac{1}{2}|V(H)|$  pre každý podgraf  $H \subseteq G$ .
6. Dokážte, že pre strom  $T$  s  $|V(T)| = 2k$ ,  $k \geq 1$  je  $\alpha_1(T) = k$  práve vtedy, keď pre každý vrchol  $v$  graf  $G - v$  má práve jeden komponent s nepárnym počtom vrcholov.
7. V skupine deviatich osôb jedna osoba pozná dve iné, dve osoby poznajú štyri iné, štyri osoby poznajú päť iných a zvyšné dve osoby poznajú šesť iných. Dokážte, že potom niektoré tri osoby sa poznajú navzájom.
8. Dokážte, že pre ľubovoľné zafarbenie hrán grafu  $K_{5,5}$  červenou a modrou farbou existuje červený podgraf  $K_{2,2}$  alebo modrý podgraf  $K_{2,2}$ .
9. Vypočítajte  $R(3, 4)$ .
10. Vypočítajte  $R(3, 3, 3)$ .