Cvičenie č. 5

1. Dokážte, že šachovnicu 8×8 bez protiľahlých rohových štvorcov nie je možné pokryť dominami 1×2.

2. Dokážte, že graf G je bipartitný práve vtedy, keď pre každý podgraf $H \subseteq G$ s $\delta(H) > 0$ platí $\alpha_0(H) = \beta_1(H)$.

3. Ukážte, že pre každý graf G platí $\alpha_1(G) \leq \beta_0(G)$ a nájdite príklad grafu G, pre ktorý sa nadobúda ostrá nerovnosť.

4. Určte minimálny možný počet hrán v maximálnej nezávislej hranovej množine grafu C_n (pozn. nezávislá hranová množina M je maximálna práve vtedy, keď $M \cup e$ nie je nezávislá pre žiadnu hranu $e \notin M$.).

5. Faktor grafu G sa nazýva *lineárny*, ak každý jeho vrchol má stupeň 1. Dokážte, že Petersenov graf nemožno rozložiť na tri lineárne faktory (t.j. neexistuje rozklad množiny jeho hrán na tri disjunktné množiny, z ktorých každá indukuje lineárny faktor).

6. Určte maximálny počet hrán grafu, ktorý má n vrcholov a neobsahuje kružnicu s 5 vrcholmi.

7. Nájdite graf G s n vrcholmi a m hranami taký, že $m = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ a G neobsahuje trojuholník.

8. Dokážte, že ak graf G má n vrcholov a neobsahuje $K_{2,2}$ ako podgraf, tak má najviac $\dfrac{n^{\frac{3}{2}} + n}{2}$ hrán.

9. Nech G je cesta dĺžky 3 a H je kružnica so 4 vrcholmi. Dokážte, že $r(G,G) = r(G,H) = 5$, $r(H,H) = 6$ ($r(G_1, G_2)$ je najmenšie prirodzené n také, že pre ľubovoľné zafarbenie hrán grafu K_n dvoma farbami existuje pre niektoré i, $i = 1, 2$ podgraf K_n izomorfný s G_i, ktorý má všetky hrany farby i).

10. Dokážte, že $r(k,l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.