Cvičenie č. 6

1. Určte, ktorý systém podmnožín množiny $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ má systém rozličných reprezentantov:

   a) $\{\{2\},\ \{2,6,4\},\ \{2,1,6\},\ \{2,6,8\},\ \{4,2,6,8\}\}$

   b) $\{\{3,4,7\},\ \{6,3,4\},\ \{6,8,4\},\ \{6,8,3\},\ \{8\}\}$

   c) $\{\{3,5,4,1,2\},\ \{4,3,5,6,2\},\ \{3,2\},\ \{1,2\},\ \{1,3\}\}$

2. Nech $S = \{1,2,3,4,5\}$ a $\mathcal{S} = \{S_{i,j,k} = \{i,j,k\},\ i,j,k = 1\ldots5\}$. Zistite, či $\mathcal{S}$ má systém rozličných reprezentantov.

3. Zistite, koľko perfektných spárení existuje v grafe $K_{n,n}$ a v grafe K_{2m}.

4. Koľko perfektných spárení existuje v strome T ?

5. Zostrojte kubický graf, ktorý nemá perfektné spárenie.

6. Nech M je perfektné spárenie v r-regulárnom grafe G pre r nepárne. Dokážte, že M obsahuje každý most grafu G.

7. Pomocou Bergeovej vety dokážte, že pomer počtom hrán najpočetnejšieho a maximálneho spárenia grafu nepresahuje 2.

8. Dokážte, že ak M, N sú dve disjunktné spárenia grafu G a $|M| > |N|$, tak existujú disjunktné spárenia M_1, N_1 také, že $|M_1| = |M| - 1$, $|N_1| = |N| + 1$ a $M_1 \cup N_1 = M \cup N$.

9. Nech G je r-regulárny bipartitný graf, $r \geq 1$. Dokážte, že množinu hrán G možno rozložiť na r disjunktných spárení.

10. Nech G je graf s $2n$ vrcholmi taký, že $\delta(G) \geq n$. Dokážte, že G má perfektné spárenie.