Cvičenie č. 8

1. Nech G je graf s aspoň 4 vrcholmi a nech pre každú trojicu rôznych vrcholov u, v, w platí, že podgraf $G[\{u, v, w\}]$ má aspoň dve hrany. Potom G je hamiltonovský. Dokážte!

2. Určte, pre ktoré hodnoty $p_1, p_2, \dots p_n$ je graf $K_{p_1, p_2, \dots p_n}$ hamiltonovský.

3. Nájdite príklad nehamiltonovského grafu G s $\delta(G) \geq \frac{n}{2} - 1$.

4. Zistite, v ktorých prípadoch je graf získaný z Petersenovho grafu kontrakciou niektorej hrany hamiltonovský.

5. Dokážte, že ak G je graf s n vrcholmi a m hranami, $m \geq \binom{n-1}{2} + 1$, tak G je hamiltonovský.

6. Nech G je graf s n vrcholmi a $d_1, d_2, \dots d_n$ sú stupne jeho vrcholov, $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$. Dokážte, že $\chi(G) \leq \max\limits_{i \in \{1 \dots n\}} \min\{d_i + 1, i\}$.

7. Dokážte, že pre každý graf G platí $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2|E(G)| + \frac{1}{4}}$.

8. Nech G je n-vrcholový d-regulárny graf. Dokážte, že $\chi(G) \geq \frac{n}{n-d}$.

9. Dokážte, že pre graf G s n vrcholmi platí $\chi(G) \cdot \alpha_0(G) \geq n$, $\chi(G) + \alpha_0(G) \leq n + 1$.

10. Nech $l(G)$ je dĺžka najdlhšej cesty v grafe G. Dokážte, že $\chi(G) \leq l(G) + 1$.