

Doplnkové príklady (časť 1)

1. Ak n -vrcholový graf má $n - 1$ rôznych stupňov vrcholov, ktorý z nich sa opakuje ?
2. Dokážte, že existujú práve tri neizomorfné 8-vrcholové 3-regulárne grafy.
3. Nájdite graf, ktorého žiadne dva vrcholy nemajú izomorfné okolia.
4. Dokážte, že graf získaný z Petersenovho grafu odobratím vrcholov ľubovoľného jeho 5-cyklu je tiež 5-cyklus.
5. Dokážte, že ak náhodne očísľujeme vrcholy 10-vrcholovej kružnice číslami $1, 2, \dots, 10$, tak existujú 3 po sebe idúce vrcholy tejto kružnice, ktorých očísľovania dávajú súčet 17.
6. Určte počet faktorov grafu K_n .
7. Určte počet 4-cyklov v grafe $K_{m,n}$.
8. Určte počet podgrafov grafu K_n izomorfných s grafom $K_{1,3}$.
9. V grafe K_n zvoľme dva rôzne vrcholy a, b . Určte počet všetkých $a - b$ ciest dĺžky l , $1 \leq l \leq n - 1$.
10. Pre každé prirodzené číslo k určte, či existuje graf, ktorý má presne i vrcholov stupňa i pre $i \in \{1, \dots, k\}$.
11. Dokážte, že pre bipartitný graf G s n vrcholmi je $\delta(G) + \Delta(G) \leq n$.
12. Určte, pre ktoré n existuje párný n -vrcholový graf G taký, že jeho komplement $\overline{G}$ je tiež párný.
13. Dokážte alebo vyvráťte: Každá hrana grafu patrí do nejakej jeho kostry.
14. Dokážte, že graf G je strom práve vtedy, keď pre každý jeho vrchol v je počet komponentov grafu $G - v$ rovný $\deg_G(v)$.
15. Nech S je množina $k + 1$ vrcholov n -vrcholovej cesty P_n . Dokážte, že potom existujú dva vrcholy v S také, že ich vzdialenosť je násobkom k .

16. Dokážte alebo vyvráťte: Každý eulerovský bipartitný graf má párný počet vrcholov.
17. Určte minimálny počet vrcholov, ktoré treba odobrať z Petersenovho grafu tak, aby vzniknutý graf mal iné číslo nezávislosti, než má Petersenov graf.
18. Graf G je súvislý a má 7 vrcholov. Pre každý doleuvedený výrok nájdite príklad grafu, ktorý ho spĺňa alebo dokážte, že graf s takýmito vlastnosťami neexistuje:
- (a) Stupne vrcholov G sú 1,1,2,3,4,4,4.
 - (b) G má jeden vrchol stupňa 6, šesť vrcholov stupňa 3 a je planárny.
 - (c) G je regulárny graf stupňa 4 a jeho hranové chromatické číslo je 3.
 - (d) G má 12 hrán a neobsahuje hamiltonovskú kružnicu.
 - (e) G má 12 hrán a obsahuje hamiltonovskú kružnicu.
 - (f) G má 19 hrán a neobsahuje hamiltonovskú kružnicu.