

Cvičenie 1 – Základné pojmy teórie grafov

Pojmy na zopakovanie:

- graf, vrcholy, hrany, susednosť a incidencia
- stupeň vrchola, handshaking lemma
- podgraf, indukovaný podgraf, komplement grafu
- operácie na grafoch: odobratie vrchola, odobratie a kontrakcia hrany, zjednotenie, spojenie a karteziánsky súčin grafov
- kompletný graf, regulárny graf, bipartitný graf, kompletný bipartitný graf
- izomorfizmus grafov

Úlohy v rámci cvičenia

- 1 Zostrojte všetky navzájom neizomorfné grafy, ktoré majú 5 vrcholov a 7 hrán.
- 2 Nakreslite všetky navzájom neizomorfné grafy s postupnosťou stupňov vrcholov $(6, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$ a ukážte, že ste žiaden z nich nevynechali.
- 3 Nájdite všetky 3-regulárne grafy na 6 vrcholoch.
- 4 Dokážte, že každý graf G obsahuje cestu dĺžky $\delta(G)$.
- 5 Nech G je 3-regulárny graf. Dokážte, že G má kružnicu párnej dĺžky.

Úlohy na samostatnú prácu – štandardné

- 1 Dokážte, že pre každý graf G je $\delta(G) \leq \frac{2|E(G)|}{|V(G)|} \leq \Delta(G)$.
- 2 Nájdite najmenší graf (t.j. s minimálnym možným počtom vrcholov) so šiestimi vrcholmi stupňa 3, ostatnými vrcholmi stupňa najviac 2 a s 12 hranami.
- 3 Nech G je graf s 9 vrcholmi, pričom každý vrchol má stupeň 5 alebo 6. Dokážte, že G má aspoň 5 vrcholov stupňa 6 alebo aspoň 6 vrcholov stupňa 5.
- 4 Rozhodnite, či existuje graf s $n \geq 2$ vrcholmi taký, že stupne jeho vrcholov sú navzájom rôzne.
- 5 Zostrojte všetky 5-vrcholové grafy, ktoré
 - a) neobsahujú graf $K_{1,2}$ ako podgraf
 - b) neobsahujú graf $K_{1,2}$ ako indukovaný podgraf.
- 6 Popíšte všetky grafy, ktoré sú nadgrafmi grafu $K_{1,2}$ a súčasne podgrafmi grafu $G = (V, E)$, $V = \{a, b, c, d, e\}$, $E = \{ab, bc, ac, bd, cd, de\}$.

Úlohy na samostatnú prácu – nadštandardné

- 1 Určte všetky dvojice (k, n) prirodzených čísel, pre ktoré existuje k -regulárny graf na n vrchoch.
- 2 Dokážte, že ak graf G neobsahuje K_3 ako podgraf, tak $|V(G)| \geq \Delta(G) + \delta(G)$.
- 3 Dokážte, že ak G je bipartitný graf, tak $|E(G)| \leq \frac{|V(G)|^2}{4}$.
- 4 Nájdite všetky bipartitné grafy, ktorých komplementy sú tiež bipartitné.
- 5 Určte maximálny počet hrán grafu, ktorý má n vrcholov a k komponentov súvislosti.