

Cvičenie 3 – Stromy, kostry

Pojmy na zopakovanie:

- kružnica, strom, les
- charakterizácia stromov
- kostra grafu, počet kostier grafu
- minimálna kostra ohodnoteného grafu

Úlohy v rámci cvičenia

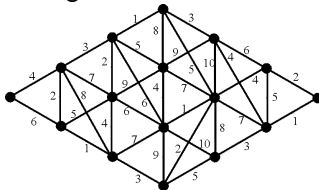
- 1 Nakreslite všetky neizomorfné stromy na 6 vrchoch a ukážte, že ste žiaden z nich nevynechali.
- 2 Dokážte, že každý strom T má aspoň $\Delta(T)$ listov.
- 3 Nech T je strom s n vrcholmi, $n \geq 3$. Označme v_i počet vrcholov stupňa i v T . Dokážte, že

$$\sum_{i=3}^{n-1} (i-2)v_i = v_1 - 2.$$

- 4 Nech T je strom. Dokážte, že jeho vrcholy možno zoradiť do postupnosti $v_1, v_2, \dots, v_n$ tak, že grafy $T_i = \langle \{v_1, \dots, v_i\} \rangle$ sú stromy pre všetky $i = 1, \dots, n$.
- 5 Určte počet kostier grafu $K_{3,3}$.

Úlohy na samostatnú prácu – štandardné

- 1 Nech G je súvislý graf. Dokážte, že $|E(G)| = |V(G)|$ práve vtedy, keď G má jedinú kružnicu.
- 2 Nájdite vzorec pre počet visiacych vrcholov n -vrcholového stromu, ktorého všetky nevisiace vrcholy majú rovnaký stupeň d .
- 3 Dokážte, že každá kostra konečného súvislého grafu obsahuje všetky jeho mosty.
- 4 Nech G je multigraf taký, že po odstránení všetkých jeho násobných hrán vznikne kružnica; nech multiplicity jeho multihrán sú $m_1, \dots, m_k$. Odvodte vzorec pre počet kostier G .
- 5 Nájdite minimálnu kostru grafu



Úlohy na samostatnú prácu – nadštandardné

- ① *Centrum* grafu G je taký jeho indukovaný podgraf $\langle X \rangle$, že X obsahuje všetky vrcholy, ktorých excentricita je rovná polomeru grafu G . Dokážte, že centrum každého stromu pozostáva z jedného alebo dvoch vrcholov.
- ② Nech G je súvislý graf. Dokážte, že $|E(G)| = |V(G)|$ práve vtedy, keď G má jedinú kružnicu.
- ③ Dokážte, že graf je strom práve vtedy, keď je súvislý a každá jeho hrana je most.
- ④ Určte počet kostier grafu $K_{2,n}$.
- ⑤ Určte počet kostier grafu $P_n \square K_2$ ("rebrík" zložený z n štvorcov).