

Cvičenie 5 – Nezávislosť v grafoch

Pojmy na zopakovanie:

- maximálna a najväčšia nezávislá množina, číslo nezávislosti
- maximálne a najpočetnejšie spárenie, číslo hranovej nezávislosti
- vrcholové pokrytie, číslo vrcholového pokrytia
- hranové pokrytie, číslo hranového pokrytia

Úlohy v rámci cvičenia

- 1 Určte číslo vrcholovej a hranovej nezávislosti pre Petersenov graf.
- 2 Dokážte, že graf G je bipartitný práve vtedy, keď $\alpha_0(H) \geq \frac{1}{2}|V(H)|$ pre každý podgraf $H \subseteq G$.
- 3 Dokážte, že ak G je bipartitný graf, tak $|E(G)| \leq \alpha_0\beta_0$, pričom rovnosť sa nadobúda práve pre kompletne bipartitné grafy.
- 4 Zostrojte všetky súvislé 5-vrcholové grafy, ktoré majú aspoň dva mosty (aspoň dve artikulácie).
- 5 Určte minimálnu a maximálnu hodnotu $\alpha_0(T)$ a $\alpha_1(T)$ pre n -vrcholový strom T .

Úlohy na samostatnú prácu – štandardné

- 1 Dokážte, že ak graf G nemá izolované vrcholy, tak
$$\alpha_0(G) \leq \frac{|E(G)|}{\delta(G)}.$$
- 2 Dokážte, že pre každý strom T je $\alpha_0(T) \geq \frac{|V(G)|}{2}.$
- 3 Určte číslo vrcholového a hranového pokrytia grafu n -bokého ihlanu.
- 4 Určte $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ pre graf n -rozmernej kocky.
- 5 Určte číslo vrcholovej nezávislosti grafov platónskych telies.

Úlohy na samostatnú prácu – nadštandardné

- ❶ Ako sa môže zmeniť číslo vrcholovej nezávislosti po odobratí vrchola, resp. hrany ?
- ❷ Dokážte, že ak T je strom s $2k$ vrcholmi, tak $\alpha_1(T) = k$ práve vtedy, keď pre každý vrchol $v \in V(T)$ má graf $G - v$ práve jeden komponent s nepárnym počtom vrcholov.
- ❸ Dokážte, že pre každý graf G platí

$$\alpha_0(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{\deg_G(v) + 1}$$

- ❹ Dokážte, že ak G je graf s n vrcholmi a m hranami, tak

$$\alpha_0(G) \geq \frac{n^2}{2m + n}$$

- ❺ Určte minimálny počet vrcholov, ktoré treba odobrať z Petersenovho grafu tak, aby vzniknutý graf mal iné číslo nezávislosti, než má Petersenov graf.