

Cvičenie 6 – Ramseyove čísla grafov, extrémálna teória grafov

Pojmy na zopakovanie:

- Ramseyove čísla, ich existencia
- odhady pre Ramseyove čísla
- počet hrán grafov bez trojuholníkov, Turánova veta

Úlohy v rámci cvičenia

- 1 Vypočítajte $R(3, 4)$.
- 2 Vypočítajte $R(3, 3, 3)$
- 3 Dokážte, že pre ľubovoľné zafarbenie hrán grafu $K_{5,5}$ červenou a modrou farbou existuje červený podgraf $K_{2,2}$ alebo modrý podgraf $K_{2,2}$.
- 4 V skupine deviatich osôb jedna osoba pozná dve iné, dve osoby poznajú štyri iné, štyri osoby poznajú päť iných a zvyšné dve osoby poznajú šesť iných. Dokážte, že potom niektoré tri osoby sa poznajú navzájom.

Úlohy na samostatnú prácu – nadštandardné

- 1 Pokúste sa určiť minimálny a maximálny počet trojuholníkov v n -vrcholovom grafe, ktorý má viac ako $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ hrán (podľa Turánovej vety je zaručená existencia aspoň jedného trojuholníka).
- 2 Nech G je cesta dĺžky 3 a H je kružnica so 4 vrcholmi. Dokážte, že $r(G, G) = r(G, H) = 5$, $r(H, H) = 6$ ($r(G_1, G_2)$ je najmenšie prirodzené n také, že pre ľubovoľné zafarbenie hrán grafu K_n dvoma farbami existuje pre niektoré i , $i = 1, 2$ podgraf K_n izomorfný s G_i , ktorý má všetky hrany farby i).
- 3 Dokážte, že ak graf G má n vrcholov a neobsahuje $K_{2,2}$ ako podgraf, tak má najviac $\frac{n^{\frac{3}{2}} + n}{2}$ hrán.