

Cvičenie 7 – Spárenia

Pojmy na zopakovanie:

- maximálne a najpočetnejšie spárenie v grafe
- spárenia v bipartitných grafoch, Hallova veta
- perfektné spárenia, Tutteho veta

Úlohy v rámci cvičenia

- 1 Určte, ktorý systém podmnožín množiny $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ má systém rozličných reprezentantov:
 - a) $\{\{2\}, \{2, 6, 4\}, \{2, 1, 6\}, \{2, 6, 8\}, \{4, 2, 6, 8\}\}$
 - b) $\{\{3, 4, 7\}, \{6, 3, 4\}, \{6, 8, 4\}, \{6, 8, 3\}, \{8\}\}$
 - c) $\{\{3, 5, 4, 1, 2\}, \{4, 3, 5, 6, 2\}, \{3, 2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$
- 2 Určte minimálny možný počet hrán v maximálnej nezávislej hranovej množine grafu C_n (pozn. nezávislá hranová množina M je maximálna práve vtedy, keď $M \cup e$ nie je nezávislá pre žiadnu hranu $e \notin M$).
- 3 Faktor grafu G sa nazýva *lineárny*, ak každý jeho vrchol má stupeň 1. Dokážte, že Petersenov graf nemožno rozložiť na tri lineárne faktory (t.j. neexistuje rozklad množiny jeho hrán na tri disjunktné množiny, aby každá indukovala lineárny faktor).
- 4 Dokážte, že šachovnicu 8×8 bez protiaľhlých rohových štvorcov nie je možné pokryť (vzájomne sa neprekrývajúcimi a nepresahujúcimi okraj) dominami rozmeru 1×2 .

Úlohy na samostatnú prácu – štandardné

- 1 Zistite, koľko perfektných spárení existuje v grafe $K_{n,n}$ a v grafe K_{2m} .
- 2 Určte minimálnu a maximálnu hodnotu $\alpha_1(T)$ pre n -vrcholový strom T .
- 3 Nech $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $\mathcal{S} = \{S_{i,j,k} = \{i, j, k\}, i, j, k = 1 \dots 5\}$. Zistite, či $\mathcal{S}$ má systém rozličných reprezentantov.
- 4 Nech M je perfektné spárenie v r -regulárnom grafe G a r je nepárne. Dokážte, že M obsahuje všetky mosty G .
- 5 Dokážte, že pre každý graf G platí $\alpha_1(G) \leq \beta_0(G)$ a nájdite príklady grafov, pre ktoré sa nadobúda rovnosť.

Úlohy na samostatnú prácu – nadštandardné

- ❶ Nech G je r -regulárny bipartitný graf, $r \geq 1$. Dokážte, že množinu hrán G možno rozložiť na r disjunktných spárení.
- ❷ Dokážte, že ak M, N sú dve disjunktné spárenia grafu G a $|M| > |N|$, tak existujú disjunktné spárenia M_1, N_1 také, že $|M_1| = |M| - 1$, $|N_1| = |N| + 1$ a $M_1 \cup N_1 = M \cup N$.
- ❸ Zistite veľkosť najpočetnejšieho spárenia v grafoch platónskych mnohostenov.
- ❹ Nech G je graf s $2n$ vrcholmi a $\delta(G) \geq n$. Dokážte, že G obsahuje perfektné spárenie.