

Cvičenie 8 – Eulerovské a hamiltonovské grafy

Pojmy na zopakovanie:

- eulerovská kružnica, eulerovský graf
- charakterizácia eulerovských grafov
- hamiltonovská kružnica, hamiltonovský graf
- nutná podmienka pre hamiltonovskosť grafu, Diracova a Oreho veta

Úlohy v rámci cvičenia

- ① Myš vyjedá tunel v $3 \times 3 \times 3$ kocke syra cez všetky jej podkocky $1 \times 1 \times 1$. Ak začne v rohu kocky a premiestňuje sa vždy do nevyjedenej kocky, môže skončiť v stredovej kocke?
- ② Nech G je súvislý graf. Dokážte, že existuje eulerovský graf H taký, že $|V(H)| \leq |V(G)| + 1$ a G je indukovaným podgrafom H .
- ③ Dokážte, že Petersenov graf nie je hamiltonovský.
- ④ Určte, pre ktoré hodnoty $p_1, p_2, \dots, p_n$ je graf $K_{p_1, p_2, \dots, p_n}$ hamiltonovský.
- ⑤ Nech Z_1 je graf získaný z grafu $K_{1,3}$ pridaním hrany. Dokážte, že ak G je 2-súvislý graf neobsahujúci $K_{1,3}$ a Z_1 ako indukované podgrafy, tak G je hamiltonovský.

Úlohy na samostatnú prácu – štandardné

- ❶ Nech G je súvislý graf. Dokážte, že v G existuje uzavretý sled obsahujúci každú hranu G dvakrát.
- ❷ Nájdite dvojicu neizomorfných grafov s rovnakým počtom vrcholov, ktoré sú hamiltonovské, ale nie sú eulerovské.
- ❸ Nájdite príklad nehamiltonovského grafu G s $\delta(G) \geq \frac{n}{2} - 1$.
- ❹ Určte, pre ktoré n existuje hamiltonovský graf G taký, že $\overline{G}$ je tiež hamiltonovský.
- ❺ Nech graf G má dva nesusedné vrcholy x, y stupňa 5, všetky ostatné vrcholy sú stupňa 3 a ak nejaký vrchol z je susedný s x , tak je susedný aj s vrcholom y . Dokážte, že G nie je hamiltonovský.

Úlohy na samostatnú prácu – nadštandardné

- 1 Dokážte alebo vyvráťte: Ak G, H sú hamiltonovské grafy, tak karteziánsky súčin $G \square H$ je hamiltonovský.
- 2 Určte, pre ktoré n existuje hamiltonovský graf G taký, že $\overline{G}$ je tiež hamiltonovský.
- 3 Nech G je graf s aspoň 4 vrcholmi a nech pre každú trojicu rôznych vrcholov u, v, w platí, že podgraf G indukovaný množinou $\{u, v, w\}$ má aspoň dve hrany. Dokážte, že G je hamiltonovský.
- 4 Dokážte, že ak G je graf s n vrcholmi a m hranami, $m \geq \binom{n-1}{2} + 1$, tak G je hamiltonovský.
- 5 Určte, pre ktoré n je graf n -rozmernej kocky eulerovský a hamiltonovský.