

Cvičenie 9 – Farbenia grafov

Pojmy na zopakovanie:

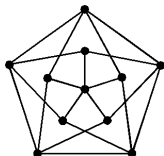
- vrcholové farbenie, chromatické číslo
- odhady pre chromatické číslo, Brooksova veta
- chromatický polynóm grafu
- hranové farbenie, hranové chromatické číslo
- Vizingova veta

Úlohy v rámci cvičenia

- 1 Dokážte, že pre každý graf G platí

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2|E(G)| + \frac{1}{4}}.$$
- 2 Nech G je n -vrcholový d -regulárny graf. Dokážte, že

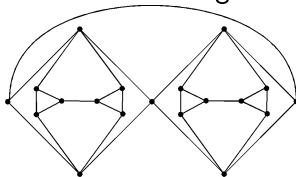
$$\chi(G) \geq \frac{n}{n-d}.$$
- 3 Určte chromatické číslo Grötzschovho grafu:



- 4 Nech G je graf s p vrcholmi a q hranami. Dokážte, že ak
 $q > \Delta(G) \cdot \alpha_1(G)$, tak G je graf patriaci do triedy 2.
- 5 Dokážte, že pre chromatický polynóm stromu T s n vrcholmi
 platí $P(k, T) = k(k-1)^{n-1}$.

Úlohy na samostatnú prácu – štandardné

- 1 Určte chromatické číslo Havlovho grafu:



- 2 Dokážte, že hranové chromatické číslo grafov K_{2m} a K_{2n-1} je rovné $2n - 1$.
- 3 Dokážte, že každý regulárny graf s nepárnym počtom vrcholov patrí do triedy 2.
- 4 Určte chromatický polynóm k -vrcholovej kružnice.

Úlohy na samostatnú prácu – nadštandardné

- ① Zostrojte príklad grafu, pre ktorý greedy algoritmus použije viac farieb, než je chromatické číslo (princíp greedy algoritmu spočíva vo farbení susedov uz ofarbených vrcholov prvou farbou, ktorá je k dispozícii).
- ② Určte minimálny počet hrán n -vrcholového k -chromatického grafu minimálneho stupňa 2.
- ③ Dokážte, že ak G je n -vrcholový graf bez trojuholníkov, tak $\chi(G) \leq 2\sqrt{n}$.
- ④ Nech G je n -vrcholový graf a nech $d_1, \dots, d_n$ sú stupne jeho vrcholov, pričom $d_1 \geq \dots \geq d_n$. Dokážte, že
$$\chi(G) \leq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \min\{d_i + 1, i\}.$$
- ⑤ Nech $l(G)$ je dĺžka najdlhšej cesty v grafe G . Dokážte, že
$$\chi(G) \leq l(G) + 1.$$