Niektoré štandardné postupy analytickej geometrie v rovine

- **Určenie stredu úsečky**
  Ak úsečka AB je daná koncovými bodmi $A = [x_1, y_1],\ B = [x_2, y_2]$, tak jej stred je bod $S = [\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}]$.

- **Určenie ťažiska trojuholníka**
  Ak trojuholník ABC je daný vrcholmi $A = [x_1, y_1],\ B = [x_2, y_2],\ C = [x_3, y_3]$, tak jeho ťažisko je bod $T = [\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}]$.

- **Prevod parametrického vyjadrenia priamky na všeobecnú rovnicu a naopak**

  - Ak je priamka p daná všeobecnou rovnicou $p:\ ax+by+c = 0$, tak jej smerový vektor je (napr.) $\vec{p} = [-b, a]$; ďalej zvolíme ľubovoľný bod $X \in p,\ X = [x_0, y_0]$ (vyhovuje napr. $X = [0, -\frac{c}{b}]$ alebo $X = [-\frac{c}{a}, 0]$ podľa toho, či $b \neq 0$ resp. $a \neq 0$ – možnosť $a = b = 0$ nemôže nastať). Potom parametrické vyjadrenie priamky p je $p:\ x = x_0 - t \cdot b,\ y = y_0 + t \cdot a$.
  - Ak je priamka p daná parametrickým vyjadrením $p:\ x = x_0 + t \cdot p_x,\ y = y_0 + t \cdot p_y$, tak (za predpokladu, že p_x, p_y sú nenulové – inak priamo jedna z rovníc parametrického vyjadrenia určuje všeobecnú rovnicu p) vylúčením parametra t z oboch rovníc (t.j. vynásobením prvej rovnice číslom p_y, druhej číslom $-p_x$ a sčítaním týchto rovníc) dostaneme všeobecnú rovnicu $p:\ p_y x - p_x y - (p_y x_0 - p_x y_0) = 0$.

- **Určenie vzájomnej polohy bodu a priamky**
  Nech je daný bod $A = [x_1, y_1]$.

  - Ak priamka p je daná všeobecnou rovnicou $p:\ ax + by + c = 0$, tak do tohto vyjadrenia dosadíme súradnice bodu A. Ak je $ax_1 + by_1 + c = 0$, tak $A \in p$, inak $A \notin p$.

- Ak priamka p je daná parametrickým vyjadrením $p: \; x = x_0 + t \cdot p_x, \; y = y_0 + t \cdot p_y$ (kde $\vec{p} = [p_x, p_y]$ je smerový vektor p a $X_0 = [x_0, y_0] \in p$ je bod priamky), tak riešime sústavu dvoch rovníc $x_1 = x_0 + t \cdot p_x, \; y_1 = y_0 + t \cdot p_y$ jednej premennej t. Ak táto sústava má riešenie, tak $A \in p$, inak $A \notin p$.

- **Určenie vzdialenosti bodu od priamky**
  Vzdialenosť bodu $X = [x_0, y_0]$ od priamky $p: \; ax + by + c = 0$ je $d(X, p) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (v prípade, že p je daná parametrickým vyjadrením, prevedieme ho na všeobecnú rovnicu).

- **Určenie vzájomnej polohy dvoch priamok**

  - Nech priamky p, q sú dané všeobecnými rovnicami $p: \; a_1x + b_1y + c_1 = 0, \; q: \; a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Potom riešime sústavu týchto dvoch rovníc dvoch neznámych x, y. Ak táto sústava má nekonečne veľa riešení, tak p, q sú totožné priamky. Ak nemá riešenie, tak p, q sú rovnobežné. Ak má práve jedno riešenie, tak p, q sú rôznobežné a ich priesečník je bod

$$X = p \cap q = \left[\frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \right].$$

  - Nech priamky p, q sú dané parametrickými vyjadreniami $p: \; x = x_0 + s \cdot p_x, \; y = y_0 + s \cdot p_y, \; q: \; x = x_1 + t \cdot q_x, \; y = y_1 + t \cdot q_y$ (kde $\vec{p} = [p_x, p_y]$ a $\vec{q} = [q_x, q_y]$ sú smerové vektory priamok p, q a $X_0 = [x_0, y_0] \in p, \; X_1 = [x_1, y_1] \in q$ sú ich body). Potom riešime sústavu dvoch rovníc $x_0 + s \cdot p_x = x_1 + t \cdot q_x, \; y_0 + s \cdot p_y = y_1 + t \cdot q_y$ premenných s, t. Ak sústava nemá riešenie, tak p, q sú rovnobežné (to sa dá zistiť aj z toho, že vektor $\vec{p}$ je (nenulovým) násobkom vektora $\vec{q}$ a súčasne $X_1 \notin p$). Al sústava má nekonečne veľa riešení, tak p, q sú totožné (vtedy $\vec{p}$ je (nenulovým) násobkom $\vec{q}$ a $X_1 \in p$). Ak má práve jedno riešenie $[s', t']$, tak p, q sú rôznobežné a ich priesečník je

$$X = p \cap q = [x_0 + s' \cdot p_x, y_0 + s' \cdot p_y] = [x_1 + t' \cdot q_x, y_1 + t' \cdot q_y].$$

- Nech priamka p je daná všeobecnou rovnicou $p: \ ax+by+c=0$ a priamka q parametrickým vyjadrením $q: \ x=x_0+t\cdot q_x, \ y=y_0+t\cdot q_y$. Potom dosadíme vyjadrenie q do rovnice p a riešime rovnicu $a(x_0+t\cdot q_x)+b(y_0+t\cdot q_y)+c=0$ premennej t. Ak má nekonečne veľa riešení, tak p,q sú totožné. Ak nemá riešenie, tak p,q sú rovnobežné. Ak má práve jedno riešenie, tak p,q sú rôznobežné a ich priesečník je

$$X=p\cap q=\left[x_0+q_x\frac{-(ax_0+by_0+c)}{aq_x+bq_y}, y_0+q_y\frac{-(ax_0+by_0+c)}{aq_x+bq_y}\right]$$

- **Určenie uhla dvoch priamok**
  - Ak priamky p,q sú dané všeobecnými rovnicami $p: \ a_1x+b_1y+c_1=0, \ q: \ a_2x+b_2y+c_2=0$, tak kosínus ich uhla je rovný $\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.
  - Ak priamky p,q sú dané parametrickými vyjadreniami$p: \ x=x_1+t\cdot p_x, \ y=y_1+t\cdot p_y, \ q: \ x=x_2+s\cdot q_x, \ y=y_2+s\cdot q_y$, tak kosínus ich uhla je rovný $\dfrac{|p_xq_x+p_yq_y|}{\sqrt{p_x^2+p_y^2}\sqrt{q_x^2+q_y^2}}$.
  - Ak priamka p je daná všeobecnou rovnicou a priamka q parametrickým vyjadrením, tak vyjadrenie niektorej z priamok zmeníme tak, aby obidva boli rovnakého typu.

- **Zostrojenie kolmice na priamku prechádzajúcej daným bodom**
  Nech je daný bod $X=[x_0,y_0]$, ktorým má prechádzať priamka q kolmá na danú priamku p.
  - Ak priamka p má všeobecnú rovnicu $p: \ ax+by+c=0$, tak smerový vektor kolmice q je $\vec{q}=[a,b]$; z toho dostávame parametrické vyjadrenie $q: \ x=x_0+t\cdot a, \ y=y_0+t\cdot b$.
  - Ak priamka p má parametrické vyjadrenie $p: \ x=x_1+t\cdot p_x, \ y=y_1+t\cdot p_y$, tak smerový vektor kolmice q je $\vec{q}=[-p_y,p_x]$; z toho dostávame parametrické vyjadrenie $q: \ x=x_0-t\cdot p_y, \ y=y_0+t\cdot p_x$.

- **Zostrojenie obrazu daného bodu v stredovej súmernosti podľa daného stredu**
  Ak je daný stred súmernosti $S = [x_0, y_0]$ a bod $x = [x_1, y_1]$, tak bod X' stredovo súmerný s X podľa stredu S je $X' = [2x_0 - x_1, 2y_0 - y_1]$.

- **Zostrojenie zrkadlového obrazu bodu podľa danej priamky**
  Ak je daný bod $X = [x_0, y_0]$ a priamka p, tak najprv zostrojíme kolmicu q na priamku p, ktorá prechádza bodom X. Potom určíme priesečník $S = p \cap q$ priamok p, q. Napokon nájdeme bod $X' = [x_1, y_1]$ taký, že S je stredom úsečky XX'.