

Cvičenie 1 – Funkcie jednej reálnej premennej

Pojem funkcie, argument, hodnota, definičný obor, obor hodnôt

Nech sú dané dve neprázdne množiny $\mathbb{A}, \mathbb{B}$. Hovoríme, že na množine $\mathbb{A}$ je *definovaná funkcia* $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$, ak je daný predpis, ktorý každému prvku x množiny $\mathbb{A}$ priradzuje **práve jeden** prvok $f(x)$ množiny $\mathbb{B}$; zapisujeme $f : y = f(x)$ alebo iba $y = f(x)$. Symbol x v tomto zápise nazývame *argument* funkcie (alebo *nezávislá premenná*), symbol $f(x)$ *hodnota funkcie* f v bode x . Množinu $\mathbb{A}$ nazývame *definičný obor* funkcie f (označujeme $\mathcal{D}(f)$). *Obor hodnôt* funkcie f je množina $\mathcal{H}(f) = \{y \in \mathbb{B} : (\exists x \in \mathbb{A}) y = f(x)\}$.

Rovnosť funkcií

Hovoríme, že funkcie f_1 a f_2 sa *rovnajú* (zapisujeme $f_1 = f_2$) ak platí:

- 1 $\mathcal{D}(f_1) = \mathcal{D}(f_2)$,
- 2 $(\forall x \in \mathcal{D}(f_1)) f_1(x) = f_2(x)$.

Cvičenie 1 – Funkcie jednej reálnej premennej

Základné operácie s funkciami

- 1 *súčet funkcií*: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
- 2 *rozdiel funkcií*: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$,
- 3 *súčin funkcií*: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$,
- 4 *podiel funkcií*: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Úlohy v rámci cvičenia

- 1 Do dvoch litrov 48% kyseliny sírovej pridávame 72% kyselinu sírovú. Vyjadrite výslednú koncentráciu C zmesi ako funkciu množstva x 72% kyseliny sírovej a zostrojte graf tejto funkcie.
- 2 Rozhodnite, či množina všetkých usporiadaných dvojíc $[x, y]$ spĺňajúcich daný vzťah je alebo nie je funkcia:

- 1 $|x| + |y| = 2$

- 2 $x^2 + y^2 - 2x = 0$

- 3 $x^2 + y^2 - 2x = -2$

- 4 $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

- 5 $y^3 = x^2 + x + 1$

- 6 $y^2 - y = \ln x$

- 3 Je daná funkcia $f : y = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$. Vypočítajte

- 1 $f(0)$

- 2 $f(\frac{1}{2})$

- 3 $f(x + 1)$

- 4 $f(f(x))$

- 4 Určte množinu tých reálnych čísel x , v ktorých má funkcia $g : y = x^2 - 5x + 6$ hodnoty v intervale $\langle -1, 2 \rangle$.

Úlohy v rámci cvičenia

- 4 Určte definičný obor funkcie f danej vzťahom

1 $y = \frac{1}{x^2 - 2}$

2 $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

3 $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$

4 $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-3} - \frac{x-2}{x+4}}$

5 $y = \log(\sqrt{-x^2 + 8x - 12} - \sqrt{3})$

6 $y = \ln(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x})$

- 5 Určte definičný obor funkcie $f : y = \sqrt{x^2 - 2x + (1-p)}$ vzhľadom na parameter p .

- 6 Zistite, či sa rovnajú funkcie $f : y = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$ a $g : y = 1 - \cos x$.

Úlohy na samostatnú prácu

- ❶ Nech je daná funkcia $f : y = \frac{x}{\sqrt{x} + 3}$. Vypočítajte $f(3), f(2a), f(a+b), f(x^2), f(f(x))$.
- ❷ Určte všetky kladné čísla a tak, aby pre funkciu $f : y = \frac{ax^2 + 5x + 1}{ax^2 - 5x + 1}$ platilo $f(-1) < 1$ a súčasne $f(1) \geq 2$.
- ❸ Nájdite koeficienty polynómu $f(x) = ax^2 + bx + c$ tak, aby $f(-2) = 0, f(0) = 1$ a $f(1) = 5$.
- ❹ Určte definičný obor funkcie f danej vzťahom

$$\begin{aligned} \text{❶ } y &= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} \\ \text{❷ } y &= \log \left(1 - \frac{3}{x+1} \right) \\ \text{❸ } y &= \sqrt{\frac{7-x}{x-2}} + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{❹ } y &= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} - \cos x}} \\ \text{❺ } y &= \frac{x}{\cotg 4x} \end{aligned}$$

Úlohy na samostatnú prácu

- 5 Určte definičný obor funkcie $f : y = \log \left(3 - \frac{p}{x^2 + 3} \right)$ vzhľadom na parameter p .

- 6 Zistite, či sa funkcie $f : y = \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x - \frac{1-2x^2}{1-x} + 1}$ rovnajú. Ak nie, nájdite maximálnu podmnožinu množiny $\mathbb{R}$, na ktorej platí $f(x) = g(x)$.

- 7 Daná je guľa s polomerom $r = 1$. Vyjadrite objem V rotačného valca vpísaného do tejto gule ako funkciu jeho výšky v a nájdite jej definičný obor a obor hodnôt.