

Cvičenie 10 – Neurčitý integrál

Neurčitý integrál

Nech f , F sú funkcie definované na intervale I a $F'(x)$ existuje pre všetky $x \in I$. Funkcia F sa volá *primitívna* k f na intervale I , ak pre všetky $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$. Množinu všetkých primitívnych funkcií k funkcii f na intervale I budeme nazývať *neurčitým integrálom* funkcie f na intervale I a označíme ho symbolom

$$\int f(x) dx.$$

Píšeme $\int f(x) dx = F(x) + C$ na intervale I , ak funkcia F je primitívna k f na intervale I . (Číslo C sa volá *integračná konštanta*.)

Integrál násobku a súčtu funkcií

$$\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx,$$

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx \pm \int f_2(x) dx.$$

Cvičenie 10 – Neurčitý integrál

Integrály základných funkcií

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2} dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2} dx = -\operatorname{cotg} x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\int \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$	$\int \operatorname{cotg} x dx = \ln \sin x + C$

Cvičenie 10 – Neurčitý integrál

Integrovanie pomocou substitučnej metódy

Nech $F(t)$ je primitívna funkcia k funkcii $f(t)$ na intervale M , nech funkcia $\varphi(x)$ má v intervale I deriváciu $\varphi'(x)$ a nech pre každé $x \in I$ je $\varphi(x) \in M$. Potom

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, dx = \int f(t) \, dt.$$

Integrovanie metódou per partes

Nech funkcie u, v majú na intervale I derivácie u', v' a existuje primitívna funkcia k $u \cdot v'$. Potom

$$\int u'(x) \cdot v(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) \, dx.$$

Úlohy v rámci cvičenia

Vypočítajte nasledujúce integrály:

$$\textcircled{1} \int \left(x + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$\textcircled{2} \int \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 dx$$

$$\textcircled{3} \int \frac{2x^5 - 3x - 1}{x^2} dx$$

$$\textcircled{4} \int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\textcircled{5} \int \frac{1 - x}{1 - \sqrt[3]{x}} dx$$

$$\textcircled{6} \int \frac{\cos(2x)}{\cos x - \sin x} dx$$

Úlohy v rámci cvičenia

Nasledujúce integrály vypočítajte pomocou substitučnej metódy:

$$\textcircled{1} \int \cos(x^2 + 1) \cdot 2x \, dx$$

$$\textcircled{2} \int 5^{1-x} \, dx$$

$$\textcircled{3} \int \frac{\ln x}{x(1 - \ln^2 x)} \, dx$$

$$\textcircled{4} \int \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} \, dx$$

$$\textcircled{5} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} \, dx$$

Úlohy v rámci cvičenia

Nasledujúce integrály vypočítajte metódou per partes:

1 $\int x \ln x \, dx$

2 $\int x \sin(2x) \, dx$

3 $\int x^3 e^x \, dx$

4 $\int \ln^2 x \, dx$

5 $\int \arccos x \, dx$

6 $\int \sin(\ln x) \, dx$

Úlohy na samostatnú prácu

Vypočítajte nasledujúce integrály:

$$\textcircled{1} \int \left(e^x + \frac{2}{1+x^2} \right) dx$$

$$\textcircled{2} \int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$\textcircled{3} \int \frac{x^4}{1+x^2} dx$$

$$\textcircled{4} \int \operatorname{tg}^2 x \, dx$$

$$\textcircled{5} \int \frac{1}{\sqrt{3-3x^2}} dx$$

Úlohy na samostatnú prácu

Nasledujúce integrály vypočítajte substitučnou metódou:

$$\textcircled{1} \int e^{x^3} x^2 \, dx$$

$$\textcircled{2} \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} \, dx$$

$$\textcircled{3} \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$$

$$\textcircled{4} \int \frac{1}{2x^2 + 3} \, dx$$

$$\textcircled{5} \int \frac{x}{2x^2 + 3} \, dx$$

$$\textcircled{6} \int \frac{1}{x^2 - 4x + 12} \, dx$$

Úlohy na samostatnú prácu

Nasledujúce integrály vypočítajte metódou per partes:

① $\int x 3^x \, dx$

② $\int x^2 \ln x \, dx$

③ $\int e^x \sin(4x) \, dx$

④ $\int x \operatorname{tg}^2 x \, dx$

⑤ $\int \operatorname{arctg} x \, dx$