

Cvičenie 2 – Základné vlastnosti funkcií

Párna a nepárna funkcia

Funkcia f sa nazýva *párna*, ak

$$(\forall x \in \mathcal{D}(f)) \quad -x \in \mathcal{D}(f) \wedge f(-x) = f(x).$$

Funkcia f sa nazýva *nepárna*, ak

$$(\forall x \in \mathcal{D}(f)) \quad -x \in \mathcal{D}(f) \wedge f(-x) = -f(x).$$

Monotónnosť funkcie

Funkcia f je *rastúca* na $\mathbb{M} \subseteq \mathcal{D}(f)$, ak

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{M}) \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Funkcia f je *klesajúca* na $\mathbb{M}$, ak

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{M}) \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$

Funkcia f je *neklesajúca* na $\mathbb{M}$, ak

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{M}) \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$

Funkcia f je *nerastúca* na $\mathbb{M}$, ak

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{M}) \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$

Ak má f niektorú z týchto vlastností, nazýva sa *monotónna*, ak má prvú alebo druhú vlastnosť, nazýva sa *rýdzomonotónna*.

Cvičenie 2 – Základné vlastnosti funkcií

Prostá funkcia

Funkcia f je *prostá* na množine $\mathbb{M} \subseteq \mathcal{D}(f)$, ak

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{M}) \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

Ak je funkcia rýdzomonotónna na množine, tak je na nej *prostá*.

Ohraničená funkcia

Funkcia f je *zdola ohraničená* na množine $\mathbb{M}$, ak

$$(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{M}) \quad f(x) \geq k.$$

Funkcia f je *zhora ohraničená* na množine $\mathbb{M}$, ak

$$(\exists l \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{M}) \quad f(x) \leq l.$$

Funkcia f je *ohraničená* na množine $\mathbb{M}$, ak je na $\mathbb{M}$ ohraničená zdola aj zhora, čo je ekvivalentné s tvrdením

$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{M}) \quad |f(x)| \leq c.$$

Cvičenie 2 – Základné vlastnosti funkcií

Periodická funkcia

Funkcia f sa nazýva *periodická*, ak

$$(\exists l \neq 0)(\forall x \in \mathcal{D}(f)) \ x + l \in \mathcal{D}(f) \wedge f(x + l) = f(x).$$

Ak pre periodickú funkciu f medzi uvedenými číslami $l \neq 0$ existuje najmenšie také l_0 , tak l_0 sa nazýva *perióda* f .

Inverzná funkcia

Nech f je prostá funkcia s definičným oborom $\mathbb{M}$ a oborom funkčných hodnôt $\mathbb{K}$.

Funkciu g nazývame *inverznou* ku funkcii f (označujeme f_{-1} alebo $\overleftarrow{f}$), ak

- 1 $\mathcal{D}(g) = \mathbb{K}$
- 2 $(\forall a \in \mathbb{K}) \ g(a) = b \Leftrightarrow a = f(b)$

Úlohy v rámci cvičenia

- ❶ Zistite, či sú nasledujúce funkcie párne, nepárne alebo ani párne, ani nepárne:

❶ $y = x^6 - 2x^4 + 4$

❷ $y = x + \cos x$

❸ $y = \frac{\sin x}{\sqrt{2} + 2 \cos x}$

❹ $y = \frac{x}{2^x - 2}$

- ❷ Nájdite maximálne intervaly, na ktorých sú nasledujúce funkcie rastúce, klesajúce, nerastúce a neklesajúce:

❶ $y = 3x - 5$

❷ $y = x^2$

❸ $y = |x| - x$

❹ $y = |x + 3| + |x - 2|$

- ❸ Rozhodnite, či funkcia f definovaná na množine $\mathbb{M}$ je ohraničená resp. ohraničená zdola alebo zhora:

❶ $f : y = \frac{1}{9 + x^2}, \mathbb{M} = \mathbb{R}$

❷ $f : y = x^2 - 4x + 5, \mathbb{M} = \mathbb{R}$

Úlohy v rámci cvičenia

- 4 Pre dané dvojice funkcií f, g nájdite zložené funkcie $f \circ f, f \circ g, g \circ f, g \circ g$:

1 $f : y = 2x, g : y = 4 - x$

2 $f : y = (x + 1)^2, g : y = \sqrt{x}$

- 5 Zistite, či dané funkcie sú na svojom definičnom obore prosté a ak áno, tak určte funkcie k nim inverzné, pričom určte aj ich definičné obory a obory hodnôt:

1 $y = \frac{2}{2 - x}$

2 $y = \sqrt{x + 1}$

3 $y = x^2 - 2$

4 $y = \ln(2 - 3x)$

Úlohy na samostatnú prácu

- ❶ Zistite, či sú nasledujúce funkcie párne, nepárne alebo ani párne, ani nepárne:

❶ $y = 3x^5 - x$

❷ $y = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$

❸ $y = 2 - |x|$

❹ $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$

- ❷ Nájdite maximálne intervaly, na ktorých sú nasledujúce funkcie rastúce, klesajúce, nerastúce a neklesajúce:

❶ $y = \frac{x}{x-3}$

❷ $y = \sqrt{2-3x}$

❸ $y = x^2 - 3x + 4$

❹ $y = \frac{x^3}{|x|}$

- ❸ Rozhodnite, či funkcia $f: y = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$, $x \in \langle -1, 0 \rangle \cup (0, 1 \rangle$ je ohraničená resp. ohraničená zdola alebo zhora.

Úlohy na samostatnú prácu

- 5 Pre dané dvojice funkcií f, g nájdite zložené funkcie $f \circ f, f \circ g, g \circ f, g \circ g$:

1 $f: y = x^2 + x + 1, g: y = x^2 - 1$

2 $f: y = \frac{x-1}{x}, g: y = \frac{x}{x-1}$

- 6 Zistite, či dané funkcie sú na svojom definičnom obore prosté a ak áno, tak určte funkcie k nim inverzné, pričom určte aj ich definičné obory a obory hodnôt:

1 $y = \sqrt[3]{x+1}$

2 $y = 2^{3x+5} - 1$

3 $y = \frac{1-x}{1+x}$

4 $y = \ln(1-x^3)$