

Cvičenie 4 – Spojitosť funkcie

Spojitosť, spojitosť zľava/sprava

Nech funkcia f je definovaná na množine $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{R}$ a $x_0 \in \mathbb{M}$. Hovoríme, že f je *spojitá* v bode x_0 , ak

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Funkcia f je *spojitá* v bode x_0 *sprava*, ak

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)) |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Funkcia f je *spojitá* v bode x_0 *zľava*, ak

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)) |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Funkcia je spojité v bode práve vtedy, keď je v bode spojité sprava aj zľava.

Cvičenie 4 – Spojitosť funkcie

Spojitosť a operácie s funkciami

Ak funkcie f, g sú spojité v bode x_0 , tak sú v x_0 spojité aj funkcie $|f|$, $c \cdot f$, $f \pm g$, $f \cdot g$, a ak $g(x_0) \neq 0$, tak v x_0 je spojitá aj funkcia $\frac{f}{g}$.

Ak funkcia g je spojitá v bode x_0 , $g(x_0) = z$ a ak funkcia f je spojitá v bode z , tak zložená funkcia $g \circ f = f(g)$ je spojitá v bode x_0 .

Spojité funkcie na uzavretom intervale ohraničená a nadobúda na ňom maximum a minimum.

Ak f je rýdzomonotónna a spojitá funkcia na intervale I a I_1 je obraz intervalu I v zobrazení funkciou f , tak inverzná funkcia f^{-1} je spojitá na intervale I_1 .

Úlohy v rámci cvičenia

- ❶ Na základe definície dokážte, že funkcia f je spojitá v bode x_0 :

❶ $f : y = x - 1, x_0 = 1$

❷ $f : y = x^2, x_0 = 0$

- ❷ Určte, pre ktoré hodnoty $a \in \mathbb{R}$ je funkcia f spojitá na svojom definičnom obore:

❶ $f : y = \begin{cases} a - x^2, & x < 0 \\ x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$

❷ $f : y = \begin{cases} ax, & x < 1 \\ 2 - \frac{x}{a}, & x \geq 1 \end{cases}$

- ❸ Nech funkcia f je spojitá a funkcia g je nespojitá v bode a . Rozhodnite, či nasledujúce funkcie sú spojité v a :

❶ $f + g$

❷ $g \circ f$

❷ $f \cdot g$

❸ $f \circ g$

❸ $\frac{g}{f}$

Úlohy na samostatnú prácu

- ❶ Na základe definície dokážte, že funkcia f je spojitá v bode x_0 :

❶ $f : y = \frac{x}{x-1}, x_0 = 0$

❷ $f : y = \sqrt{x}, x_0 = 1$

- ❷ Určte, pre ktoré hodnoty $a \in \mathbb{R}$ je funkcia

$$f : y = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ a + x, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{spojitá na svojom definičnom}$$

obore.

- ❸ Nech funkcie f a g sú nespojité v bode a . Rozhodnite, či nasledujúce funkcie sú vždy spojité v a :

❶ $f + g$

❷ $f \cdot g$

❸ $f \circ g$

❹ $|f \circ g|$

❺ $\frac{g}{f}$