Cvičenie 5 – Limita funkcie

Vlastná limita funkcie vo vlastnom bode

Nech funkcia f je definovaná na nejakom okolí $U(x_0)$ bodu x_0. Hovoríme, že funkcia f má v bode x_0 *limitu* rovnú A, ak

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))\ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Funkcia f má v bode x_0 *sprava* limitu rovnú A, ak

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0, x_0 + \delta))\ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Funkcia f má v bode x_0 *zľava* limitu rovnú A, ak

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0))\ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Nevlastná limita funkcie vo vlastnom bode

Hovoríme, že funkcia f má v bode x_0 *nevlastnú limitu* $+\infty$, ak

$$(\forall c \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))\ f(x) > c.$$

Funkcia f má v bode x_0 *nevlastnú limitu* $-\infty$, ak

$$(\forall c \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))\ f(x) < c.$$

V prípade nevlastnej limity $+\infty$ $(-\infty)$ v bode x_0 sprava resp. zľava sa v definícii miesto $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ uvažuje $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ resp. $(x_0 - \delta, x_0)$.

Cvičenie 5 – Limita funkcie

Vety o limitách

Ak funkcie f, g majú limity (vlastné) vo vlastnom bode x_0, tak platí:

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\lim_{x\to x_0} f(x)|$$

$$\lim_{x\to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = (\lim_{x\to x_0} f(x)) \cdot (\lim_{x\to x_0} g(x))$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \text{ ak } \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$$

Ak $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = z_0$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = A$ a existuje také okolie bodu x_0, že pre všetky čísla $x \neq x_0$ z tohto okolia je $g(x) \neq z_0$, tak $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = A$.

Cvičenie 5 – Limita funkcie

Limita typu $\dfrac{\neq 0}{0}$

Ak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ a existuje také okolie bodu x_0, že pre všetky $x \neq x_0$ z tohto okolia je $g(x) > 0$, tak

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \text{ ak } \lim_{x \to x_0} f(x) > 0$$

alebo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty \text{ ak } \lim_{x \to x_0} f(x) < 0$$

Ak namiesto okolia bodu x_0 uvažujeme ľavé resp. pravé okolie x_0, dostaneme analogické tvrdenia pre limity zľava resp. sprava.

Princíp stláčania

Ak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$ a existuje také okolie bodu x_0, že pre každé číslo $x \neq x_0$ z tohto okolia je $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, tak platí $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$.

Cvičenie 5 – Limita funkcie

Limita súčinu s ohraničeným činiteľom

Ak funkcia f má v bode x_0 limitu 0 a funkcia g je na nejakom okolí bodu x_0 ohraničená, tak funkcia $f \cdot g$ má v bode x_0 limitu 0.

Vzťah limity a spojitosti v bode

Funkcia f je spojitá v bode x_0 práve vtedy, keď $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Analogické tvrdenia platia pre spojitosť funkcie f v bode x_0 zľava resp. sprava.

Dôležité limity vo vlastných bodoch

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1 \text{ pre } a > 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \text{ pre } a > 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Úlohy v rámci cvičenia

1. Z definície vypočítajte limitu funkcie f v bode x_0:
   1. $f: \ y = 2x + 3, x_0 = 5$
   2. $f: \ y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, x_0 = 2$
2. Vypočítajte
   1. $\lim\limits_{x \to 4} \left(2(x+3) - \dfrac{x}{x-2}\right)$
   2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (2(\sin x - \cos x) - x^2)$
3. Vypočítajte
   1. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x + 6}{x^3 + 8}$
   2. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$
   3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}, m, n \in \mathbb{Z}$
   4. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{12}{x^3 - 8}\right)$

Úlohy v rámci cvičenia

4. Vypočítajte

   1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$
   2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$
   3. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

5. Vypočítajte

   1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 8x}{\sin 9x}$
   2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$
   3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$

Úlohy na samostatnú prácu

1. Z definície vypočítajte limitu funkcie f v bode x_0:
   1. $f:\ y = 1 + x^2, x_0 = -1$
   2. $f:\ y = \sqrt{x}, x_0 = 9$
2. Vypočítajte
   1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+3x)^4 - (1+4x)^3}{x^2}$
   2. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x^2 - 1} - \dfrac{2}{x^4 - 1} \right)$
3. Vypočítajte
   1. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x^3} - 8}$
   2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$
   3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$
   4. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x^2 - x - 20}$