

Cvičenie 6 – Limita funkcie (pokračovanie)

Vlastná limita funkcie v nevlastnom bode

Hovoríme, že funkcia f má v bode $+\infty$ limitu rovnú A , ak

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x > k) |f(x) - A| < \varepsilon$$

Funkcia f má v bode $-\infty$ limitu rovnú A , ak

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x < k) |f(x) - A| < \varepsilon$$

Nevlastná limita funkcie v nevlastnom bode

Hovoríme, že funkcia f má v bode $+\infty$ nevlastnú limitu $+\infty$, ak

$$(\forall c \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x > k) f(x) > c$$

Funkcia f má v bode $+\infty$ nevlastnú limitu $-\infty$, ak

$$(\forall c \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x > k) f(x) < c$$

Funkcia f má v bode $-\infty$ nevlastnú limitu $+\infty$, ak

$$(\forall c \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x < k) f(x) > c$$

Funkcia f má v bode $-\infty$ nevlastnú limitu $-\infty$, ak

$$(\forall c \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x < k) f(x) < c$$

Cvičenie 6 – Limita funkcie (pokračovanie)

Dôležité limity v nevlastných bodoch

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 0, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \doteq 2,718\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \text{ pre } n \in \mathbb{R}, x > 0, \\ a > 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi$$

Cvičenie 6 – Limita funkcie (pokračovanie)

Dôležité limity v nevlastných bodoch (pokračovanie)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0, & m > n \\ +\infty, & m < n, \frac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty, & m < n, \frac{a_n}{b_m} < 0 \\ \frac{a_n}{b_m}, & m = n. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \begin{cases} 0, & m > n \\ +\infty, & m < n, (-1)^{n-m} \frac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty, & m < n, (-1)^{n-m} \frac{a_n}{b_m} < 0 \\ \frac{a_n}{b_m}, & m = n. \end{cases}$$

Úlohy v rámci cvičenia

1 Vypočítajte

$$① \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{3x^2} - \frac{81}{9 - \sqrt{x}} \right)$$

$$② \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right)$$

$$③ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x - 3x^3}{1 + x^2 + 3x^3}$$

$$④ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{5x}$$

2 Vypočítajte

$$① \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$$

$$② \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - x - 1})$$

$$③ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x + 3}$$

$$④ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^6 - 1} + x^2}{(x - 2)^3}$$

Úlohy v rámci cvičenia

3 Vypočítajte

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^x$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3x}\right)^x$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$$

4 Vypočítajte

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{10+x}{5+x}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 3^x}{3 \cdot 2^x + 5 \cdot 3^x}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cos x$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log \frac{x^2 + x + 3}{x^2 - 2}$$

Úlohy na samostatnú prácu

1 Vypočítajte

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x - 1}{2x^2 - x + 1} \right)^3$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right)$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + 3)(x + 4)(x + 5)}{x^4 + x - 11}$$

2 Vypočítajte

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 6x} - \sqrt{x^2 - 6x})$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x + 3} - \sqrt{x})$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{\frac{x + 1}{x + 2}} - 1 \right)$$

Úlohy na samostatnú prácu

3 Vypočítajte

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{x+3}$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 1}\right)^x$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{5x+1}$$

4 Vypočítajte

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x (\ln(2x-1) - \ln(2x+1))$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$