

Cvičenie 7 – Derivácia funkcie

Derivácia funkcie v bode, jednostranné derivácie

Nech f je funkcia a $x_0 \in \mathbb{R}$. Hovoríme, že f má v bode x_0 *deriváciu* rovnú $f'(x_0)$, ak existuje (vlastná) limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Funkcia f má v bode x_0 *deriváciu sprava* rovnú $f'_+(x_0)$, ak existuje (vlastná) limita

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Funkcia f má v bode x_0 *deriváciu zľava* rovnú $f'_-(x_0)$, ak existuje (vlastná) limita

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Derivácia funkcie f v bode x_0 existuje práve vtedy, keď existuje derivácia f v bode x_0 sprava aj zľava a platí $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Cvičenie 7 – Derivácia funkcie

Geometrický význam derivácie, dotyčnica a normála

Derivácia $f'(x_0)$ (vlastná) funkcie f v bode x_0 je rovná smernici dotyčnice (t.j. tangensu kladne orientovaného uhla, ktorý táto dotyčnica zvierá s x -ovou osou) ku grafu funkcie f v bode s x -ovou súradnicou x_0 . Rovnica tejto dotyčnice je

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Normála funkcie f v bode x_0 je priamka prechádzajúca bodom $[x_0, f(x_0)]$ a kolmá na dotyčnicu ku grafu funkcie f v bode x_0 ; jej rovnica je

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad \text{pre } f'(x_0) \neq 0$$

(ak $f'(x_0) = 0$, tak rovnica normály je $x = x_0$).

Vety o derivovaní

Ak funkcie f, g majú derivácie f', g' , tak platí:

$$(\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f', \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$(g \circ f)' = (g \circ f') \cdot g'$$

$$(\overset{\leftarrow}{f})' = \frac{1}{f_y}$$

$$(f^g)' = f^g \left(g' \cdot (f \circ \ln) + g \cdot \frac{f'}{f} \right)$$

Cvičenie 7 – Derivácia funkcie

Tabuľka derivácií základných funkcií

$(c)' = 0, c \in \mathbb{R}$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(e^x)' = e^x$	$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(a^x)' = a^x \ln a, a > 0$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Úlohy v rámci cvičenia

❶ Použitím definície nájdite deriváciu funkcie f v bode x_0 :

$$\text{❶ } f: y = x^2 + 3, x_0 = 0 \qquad \text{❷ } f: y = \frac{1}{x^2}, x_0 = 1$$

❷ Nájdite deriváciu danej funkcie a výsledok zjednodušte:

$$\begin{array}{ll} \text{❶ } y = 5x^5 + 6x^4 + 8x^3 - 2x^2 + 3 & \text{❸ } y = (2x + 3)(x^3 + 3x + 2) \\ \text{❷ } y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{❹ } y = x^2 \sqrt[3]{x^2} \end{array}$$

❸ Nájdite deriváciu danej funkcie a výsledok zjednodušte:

$$\begin{array}{ll} \text{❶ } y = \frac{1+x}{1-x} & \text{❸ } y = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} \\ \text{❷ } y = \frac{x+1}{x^2+x+1} & \text{❹ } y = \frac{(x-3)(5-2x)}{3x^2-x+7} \end{array}$$

Úlohy v rámci cvičenia

4 Nájďte deriváciu danej funkcie a výsledok zjednodušte:

1 $y = (x^3 + 7x^2 - x + 1)^4$

2 $y = \sqrt{1 - x^4}$

3 $y = \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{x}$

4 $y = \frac{1 - x^2}{\sqrt{x}}$

5 Nájďte deriváciu danej funkcie a výsledok zjednodušte:

1 $y = \ln(x^2 + 1)$

2 $y = \frac{x^2}{\ln x}$

3 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4})$

4 $y = \ln \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1}$

6 Nájďte deriváciu danej funkcie a výsledok zjednodušte:

1 $y = e^{-\frac{1}{x}}$

2 $y = xe^{-x^2}$

3 $y = \frac{e^x}{x^3}$

4 $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

Úlohy v rámci cvičenia

7 Nájďte deriváciu danej funkcie a výsledok zjednodušte:

1 $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

2 $y = \sin^3 x + \cos^3 x$

3 $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \cotg x$

4 $y = \frac{1}{\sin^2 x}$

8 Nájďte deriváciu danej funkcie a výsledok zjednodušte:

1 $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

2 $y = \operatorname{arcsin} \frac{x^2 - 1}{x^2}$

3 $y = \frac{\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}$

4 $y = \frac{1}{2 - x} - \operatorname{arctg}(x - 2)$

Úlohy na samostatnú prácu

- ❶ Použitím definície nájdite deriváciu funkcie f v bode x_0 :

❶ $f : y = x(x+2)^2, x_0 = 1$ ❷ $f : y = \sqrt{2+x}, x_0 = 0$

- ❷ Vypočítajte deriváciu funkcie a výsledok zjednodušte:

❶ $y = x^{-5} + x^{-7}$

❸ $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x^4}}$

❷ $y = 7x^4 + 5x^3 + 3x^2 + x$

❹ $y = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-2}$

❸ $y = (x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1)$

❺ $y = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[4]{x}$

- ❸ Vypočítajte deriváciu funkcie a výsledok zjednodušte:

❶ $y = \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{x^2 + 1}{x}$

❶ $y = \frac{\sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}}$

❷ $y = \frac{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} - 5\sqrt{x})}{x}$

❷ $y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$

❸ $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}}$

❸ $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

Úlohy na samostatnú prácu

4 Vypočítajte deriváciu funkcie a výsledok zjednodušte:

$$1 \quad y = x \ln x - 1$$

$$2 \quad y = \frac{1}{\ln^2 x}$$

$$3 \quad y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$$

$$4 \quad y = \frac{x \ln x}{1 + \ln x}$$

$$5 \quad y = \ln^2(x + 1)$$

$$6 \quad y = \frac{1}{x + 1} + \frac{\ln(x^2 - 1)}{2}$$

5 Vypočítajte deriváciu funkcie a výsledok zjednodušte:

$$1 \quad y = \sqrt{\frac{3 \sin x - 2 \cos x}{5}}$$

$$2 \quad y = \sqrt{\frac{1 - \cos 4x}{1 + \cos 4x}}$$

$$3 \quad y = \sqrt{\cotg x} - \sqrt{\tg x}$$

$$4 \quad y = \frac{\cos x}{1 + \cos x}$$

$$5 \quad y = \ln \sin x$$

$$6 \quad y = \sqrt[3]{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$$

Úlohy na samostatnú prácu

6 Vypočítajte deriváciu funkcie a výsledok zjednodušte:

1 $y = e^x(x^3 + x^2 - 2x - 3)$

4 $y = \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1})$

2 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

5 $y = e^{\sqrt{x}}\sqrt{x-1}$

3 $y = \frac{3^x}{2^x}$

6 $y = \frac{\sqrt{x}}{e^x}$

7 Vypočítajte deriváciu funkcie a výsledok zjednodušte:

1 $y = x \arcsin x$

4 $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

2 $y = \arccos \sqrt{x+1}$

5 $y = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x^2 + 1}$

3 $y = \frac{x^3}{1+x^6} - \operatorname{arctg}(x^3)$

6 $y = \ln \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x+1}}$