

Cvičenie 9 – Vyšetrovanie priebehu funkcie

Elementy analýzy priebehu funkcie

Pri zisťovaní priebehu funkcie f zisťujeme nasledujúce skutočnosti:

- 1 $\mathcal{D}(f)$, párnosť, nepárnosť, nulové body, priesečník s osou y
- 2 f'
- 3 f''
- 4 stacionárne body a body, v ktorých f' neexistuje
- 5 rast, klesanie
- 6 lokálne extrém
- 7 body, v ktorých $f''(x) = 0$ a body, v ktorých f'' neexistuje
- 8 konvexnosť, konkávnosť, inflexné body
- 9 asymptoty bez smernice
- 10 asymptoty so smernicou
- 11 skompletizovanie údajov (tabuľka)
- 12 náčrt grafu

Cvičenie 9 – Vyšetrovanie priebehu funkcie

Podmienky pre rast/klesanie funkcie v bode, existencia extrémov

Ak $f'(x_0) > 0$, tak funkcia f je v bode x_0 rastúca. Ak $f'(x_0) < 0$, tak funkcia f je v bode x_0 klesajúca.

Ak $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$), tak funkcia f má v bode x_0 lokálne maximum (lokálne minimum).

Ak $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), tak funkcia f je v bode x_0 konvexná (konkávna).

Asymptoty

Priamka $x = a$ sa nazýva *asymptota bez smernice* grafu funkcie f , ak f má v bode a nevlastnú limitu sprava alebo zľava.

Nech funkcia f je definovaná na intervale (a, ∞) (resp. $-\infty, a)$) pre nejaké $a \in \mathbb{R}$. Priamka $y = kx + q$ sa nazýva *asymptota so smernicou* grafu funkcie f pre $x \rightarrow \infty$ (resp. $x \rightarrow -\infty$), ak $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (kx + q)) = 0$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (kx + q)) = 0$).

Platí $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$ (analogicky aj pre $x \rightarrow -\infty$).

Úlohy v rámci cvičenia

Vyšetrite priebeh daných funkcií:

$$\textcircled{1} \quad y = \frac{1 - 2x}{3x^2}$$

$$\textcircled{2} \quad y = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\textcircled{3} \quad y = x^2 - 4\sqrt[3]{x^2}$$

$$\textcircled{4} \quad y = \ln(x^2 - 2x + 2)$$

$$\textcircled{5} \quad y = xe^{-\frac{x}{2}}$$

$$\textcircled{6} \quad y = x + \operatorname{arctg} x$$

Úlohy na samostatnú prácu

Vyšetrite priebeh daných funkcií:

$$\textcircled{1} \quad y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$\textcircled{2} \quad y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x + 3}$$

$$\textcircled{3} \quad y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\textcircled{4} \quad y = x \ln(x^2)$$

$$\textcircled{5} \quad y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

$$\textcircled{6} \quad y = 2x + \arcsin x$$