Cvičenie č. 4,5 – Limita funkcie

Definícia limity

- **Limita funkcie (vlastná vo vlastnom bode)**

  Nech funkcia f je definovaná na nejakom okolí $U(x_0)$ bodu x_0. Hovoríme, že funkcia f má v bode x_0 *limitu* rovnú A, ak

  $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))\ |f(x) - A| < \varepsilon$$

  Funkcia f má v bode x_0 *sprava* limitu rovnú A, ak

  $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0, x_0 + \delta))\ |f(x) - A| < \varepsilon$$

  Funkcia f má v bode x_0 *zľava* limitu rovnú A, ak

  $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0))\ |f(x) - A| < \varepsilon$$

- **Limita funkcie (nevlastná vo vlastnom bode)**

  Hovoríme, že funkcia f má v bode x_0 *nevlastnú limitu* $+\infty$, ak

  $$(\forall c \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))\ f(x) > c$$

  Funkcia f má v bode x_0 *nevlastnú limitu* $-\infty$, ak

  $$(\forall c \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta))\ f(x) < c$$

  Limity sprava a zľava sa v tomto prípade definujú analogicky, ako v prípade vlastnej limity vo vlastnom bode.

- **Limita funkcie (vlastná v nevlastnom bode)**

  Hovoríme, že funkcia f má v bode $+\infty$ limitu rovnú A, ak

  $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x > k))\ |f(x) - A| < \varepsilon$$

  Funkcia f má v bode $-\infty$ limitu rovnú A, ak

  $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x < k))\ |f(x) - A| < \varepsilon$$

- **Limita funkcie (nevlastná v nevlastnom bode)**

  Hovoríme, že funkcia f má v bode $+\infty$ nevlastnú limitu $+\infty$, ak

  $$(\forall c \in \mathbb{R})(\exists k \in Rr)(\forall x > k)\ f(x) > c$$

  Funkcia f má v bode $+\infty$ nevlastnú limitu $-\infty$, ak

  $$(\forall c \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x > k)\ f(x) < c$$

  Funkcia f má v bode $-\infty$ nevlastnú limitu $+\infty$, ak

  $$(\forall c \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x < k)\ f(x) > c$$

  Funkcia f má v bode $-\infty$ nevlastnú limitu $-\infty$, ak

  $$(\forall c \in \mathbb{R})(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x < k)\ f(x) < c$$

Funkcia má v bode x_0 limitu A (resp. $+\infty$ resp. $-\infty$) práve vtedy, keď má v bode x_0 limitu A (resp. $+\infty$ resp. $-\infty$) sprava aj zľava.

Teda limita funkcie f v bode x_0 môže neexistovať z dvoch dôvodov:

- niektorá z jednostranných limít v bode x_0 neexistuje (vlastná ani nevlastná)

- existujú obe jednostranné limity (vlastné alebo nevlastné), avšak nenadobúdajú tú istú hodnotu.

Limita funkcie v nevlastnom bode môže neexistovať len z prvého dôvodu.

Vety o limitách

- Ak funkcie f, g majú limity (vlastné) vo vlastnom bode x_0, tak platí:

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\lim_{x\to x_0} f(x)|$$

$$\lim_{x\to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = (\lim_{x\to x_0} f(x)) \cdot (\lim_{x\to x_0} g(x))$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)},\ \text{ak}\ \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$$

Analogické tvrdenia platia pre limity zľava, sprava a limity v nevlastných bodoch.

Ak niektorá z limít funkcií f, g neexistuje, tak o limite súčtu, súčinu resp. podielu f a g nemožno nič povedať - môže existovať vlastná, nevlastná alebo vôbec nemusí existovať. Ak niektorá z týchto limít je nevlastná, tak výsledná limita je neurčitá v týchto prípadoch:

- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))$, pričom $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ (tzv. limita typu $\infty - \infty$)
- $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))$, pričom $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ (tzv. limita typu $\infty \cdot 0$)
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, pričom $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ (tzv. limita typu $\dfrac{0}{0}$)

- Ak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ a existuje také okolie bodu x_0, že pre všetky $x \neq x_0$ z tohto okolia je $g(x) > 0$, tak

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \text{ ak } \lim_{x\to x_0} f(x) > 0$$

alebo

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = -\infty \text{ ak } \lim_{x\to x_0} f(x) < 0$$

Ak namiesto okolia bodu x_0 uvažujeme ľavé resp. pravé okolie x_0, dostaneme analogické vety pre limity zľava resp. sprava.

- Ak $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = z_0$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = A$ a existuje také okolie bodu x_0, že pre všetky čísla $x \neq x_0$ z tohto okolia je $g(x) \neq z_0$, tak

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = A.$$

Dodatočnú podmienku $g(x) \neq z_0$ pre všetky $x \neq x_0$ z nejakého okolia bodu x_0 **nemožno vynechať** , čo ukazuje nasledujúci príklad:

Nech funkcie f, g sú dané predpismi $f(x) = 1,\ x \in \mathbb{R}$ a $g(y) = \begin{cases} 3 & y \neq 1 \\ 2, & y = 1 \end{cases}$. Potom pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $g(f(x)) = 2$ a teda $\lim\limits_{x\to 1} g(f(x)) = 2$ (a nie 3, ako by sa na pohľad zdalo).

- Ak funkcia f má v bode x_0 limitu 0 a funkcia g je na nejakom okolí bodu x_0 ohraničená, tak funkcia $f \cdot g$ má v bode x_0 limitu 0.

- Ak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$ a existuje také okolie bodu x_0, že pre každé číslo $x \neq x_0$ z tohto okolia je $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, tak platí $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$.

- Funkcia f je spojitá v bode x_0 práve vtedy, keď $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Analogické vety platia pre spojitosť funkcie f v bode x_0 zľava resp. sprava.

Zoznam dôležitých limít

- $\lim_{x \to a} x^k = a^k$ pre každé a, v ktorom je funkcia x^k spojitá
- $\lim_{x \to \infty} \alpha^x = 0, \ 0 < \alpha < 1$
- $\lim_{x \to -\infty} \alpha^x = +\infty, \ 0 < \alpha < 1$
- $\lim_{x \to \infty} \alpha^x = +\infty, \ \alpha > 1$
- $\lim_{x \to -\infty} \alpha^x = 0, \ \alpha > 1$
- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \ \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}\ x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} \mathrm{arctg}\ x = \frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{arctg}\ x = -\frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \to -\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right)^x = e$
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0, \ m > n \\ +\infty, \ m < n, \ \dfrac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty, \ m < n, \ \dfrac{a_n}{b_m} < 0 \\ \dfrac{a_n}{b_m}, \ m = n. \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0} = \begin{cases} 0, \ m > n \\ +\infty, \ m < n, \ (-1)^{n-m}\dfrac{a_n}{b_m} > 0 \\ -\infty, \ m < n, \ (-1)^{n-m}\dfrac{a_n}{b_m} < 0 \\ \dfrac{a_n}{b_m}, \ m = n. \end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0, \ \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln^\alpha(x)}{x^\beta} = 0, \ \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$

Typické postupy pri výpočte limít

Pri výpočte limity vo vlastnom bode x_0 najprv skontrolujeme, či dosadením x_0 za x do funkcie za znakom limity dostaneme výraz, ktorý je definovaný (má zmysel). Ak áno (a funkcia je v bode x_0 spojitá), tak výsledná hodnota po dosadení je hľadanou limitou. Inak vyhodnotíme typ výrazu, ktorý vznikne po dosadení.

Ak výraz za znakom limity je typu $\dfrac{\neq 0}{0}$, tak limita je rovná $+\infty, -\infty$ alebo vôbec neexistuje; to, ktorá situácia nastáva, určíme výpočtom danej limity v bode x_0 zľava a sprava a porovnaním týchto výsledkov.

Príklad: Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x-2}$.

Riešenie: Daná limita je typu $\dfrac{\neq 0}{0}$, určíme teda príslušné jednostranné limity:

$\lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{x+1}{x-2} = +\infty$ (k znamienku pri znaku nekonečna: pre $x \to 2+$ je čitateľ aj menovateľ zlomku za znakom limity kladný)

$\lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{x+1}{x-2} = +\infty$ (k znamienku pri znaku nekonečna: pre $x \to 2+$ je čitateľ zlomku za znakom limity kladný, menovateľ záporný)

Tieto jednostranné limity sú rôzne, teda pôvodná limita v bode 2 neexistuje.

Ak výraz za znakom limity je typu $\dfrac{0}{0}$, tak sa snažíme vykonať úpravu výrazu, vedúcu k jeho zjednodušeniu alebo k použitiu niektorých viet o limitách. Najčastejšie používané úpravy sú rozklad polynomických výrazov na súčin lineárnych alebo kvadratických (takých, ktoré nemajú reálny koreň) činiteľov, rozšírenie výrazu zlomkom s rovnakým čitateľom a menovateľom (najmä pri výrazoch obsahujúcich odmocniny), použitie goniometrických vzorcov, substitúcia (najmä pri výrazoch obsahujúcich logaritmy a cyklometrické funkcie). Možno tiež použiť l'Hospitalovo pravidlo.

Príklad: Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2+7x-44}{x^2-6x+8}$.

Riešenie: $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2+7x-44}{x^2-6x+8} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x+11)(x-4)}{(x-2)(x-4)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x+11}{x-2} = \dfrac{4+11}{4-2} = \dfrac{15}{2}$.

Príklad: Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-5}$.

Riešenie: $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x-4}-1}{x-5} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x-4}-1}{x-5} \cdot \dfrac{\sqrt{x-4}+1}{\sqrt{x-4}+1} =$

$= \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(\sqrt{x-4})^2-1^2}{(x-5)(\sqrt{x-4}+1)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-4}+1)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{\sqrt{x-4}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{1}+1} = \dfrac{1}{2}$.

Príklad: Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$.

Riešenie: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos^3 x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x(1-\cos^2 x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x \cdot \sin^2 x}{x^2} =$

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 = \left(\lim\limits_{x\to 0}\cos x\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 = 1\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 = 1\cdot 1^2 = 1.$

Príklad: Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$.

Riešenie: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \Big/ \begin{array}{l} 1+x=y^n,\ y>0 \Rightarrow \sqrt[n]{1+x}=y \\ x\to 0 \Rightarrow x+1\to 1 \Rightarrow y^n\to 1 \Rightarrow y\to 1 \end{array} \Big/ = \lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y-1}{y^n-1} = \lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y-1}{(y-1)(y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+y+1)} = \lim\limits_{y\to 1}\dfrac{1}{y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+y+1} = \dfrac{1}{n}.$

Príklad: Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

Riešenie: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\operatorname{arctg} x)'}{(x^3)'} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{x^2+1}}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2+1-1}{x^2+1}}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{x^2+1}}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3(x^2+1)} = \dfrac{1}{3}.$

Ak za znakom limity je súčin $f(x)g(x)$, ktorý je typu $\infty\cdot 0$, možno ho ekvivalentne prepísať do tvaru $\dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, čím dostaneme výraz typu $\dfrac{0}{0}$.

Ak za znakom limity je rozdiel $f(x)-g(x)$, ktorý je typu $\infty-\infty$, možno ho ekvivalentne prepísať do tvaru $\dfrac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$, čím dostaneme výraz typu $\dfrac{0}{0}$.

Ak za znakom limity je mocnina $f(x)^{g(x)}$, ktorá je typu $0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$, možno ju ekvivalentne napísať v tvare $e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x)\ln f(x)}$; potom $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)}$, čím výpočet pôvodnej limity prevedieme na výpočet limity typu $\infty\cdot 0$.

Pri výpočte limity v nevlastnom bode najprv skontrolujeme, či výraz za znakom limity nemožno vyhodnotiť pomocou viet pre počítanie s limitami (týka sa typov $\dfrac{\infty}{c},\ \dfrac{c}{\infty},\ \infty\cdot\infty, \infty+\infty$, ktoré dávajú výslednú limitu rovnú v poradí $\infty, 0, \infty, \infty$). Ak výraz za znakom limity je typu $\dfrac{\infty}{\infty}$, na výpočet použijeme l'Hospitalovo pravidlo, alebo kombináciu postupov pre výpočet limít vo vlastnom bode.