Cvičenie č. 6, 7, 8 – Derivácia funkcie

Definícia derivácie

Nech f je funkcia a $x_0 \in \mathbb{R}$. Hovoríme, že f má v bode x_0 *deriváciu* rovnú $f'(x_0)$, ak existuje (vlastná) limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Funkcia f má v bode x_0 *deriváciu sprava* rovnú $f'_+(x_0)$, ak existuje (vlastná) limita

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Funkcia f má v bode x_0 *deriváciu zľava* rovnú $f'_-(x_0)$, ak existuje (vlastná) limita

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Horeuvedené limity možno nahradiť limitami $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ resp. $\lim\limits_{h \to 0+} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ resp. $\lim\limits_{h \to 0-} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Ak tieto limity sú nevlastné, hovoríme, že funkcia má v bode *nevlastnú* deriváciu rovnú $+\infty$ resp. $-\infty$.

O derivácii (vlastnej resp. nevlastnej) funkcie v bode (resp. v bode sprava resp. zľava) možno hovoriť iba vtedy, keď je funkcia v danom bode **definovaná**.

Funkciu $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanú predpisom $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ nazývame *deriváciou* funkcie f. Pre $n \geq 2$ funkciu $f^{(n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanú predpisom $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ nazývame *n-tou deriváciou* funkcie f; označujeme tiež $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f, f_x$. Ak pre všetky $x_0 \in \mathbb{M}$ existuje $f'(x_0)$, tak hovoríme, že f má deriváciu na množine $\mathbb{M}$.

Geometrický význam derivácie

Derivácia $f'(x_0)$ (vlastná) funkcie f v bode x_0 je rovná smernici dotyčnice (t.j. tangensu kladne orientovaného uhla, ktorý táto dotyčnica zviera s x-ovou osou) ku grafu funkcie f v bode s x-ovou súradnicou x_0. Rovnica tejto dotyčnice je

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Normála funkcie f v bode x_0 je priamka prechádzajúca bodom $[x_0, f(x_0)]$ a kolmá na dotyčnicu k f v bode x_0; jej rovnica je

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad \text{pre } f'(x_0) \neq 0$$

(ak $f'(x_0) = 0$, tak rovnica normály je $x = x_0$).

Vety o deriváciách

- Ak funkcie f, g majú derivácie f', g', tak platí:

$$(\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f', \;\; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$(g \circ f)' = (g \circ f') \cdot g'$$

$$(\overleftarrow{f})' = \frac{1}{f_y}$$

$$(f^g)' = f^g \left(g' \cdot (f \circ \ln) + g \cdot \frac{f'}{f} \right)$$

- Ak funkcia f má v bode x_0 deriváciu, tak je v bode x_0 spojitá.

  Obrátená veta neplatí, pretože funkcia $f: \; y = |x|$ je v bode 0 spojitá, ale nemá v ňom deriváciu (existujú iba jednostranné derivácie $f'_+(0) = 1, f'_-(0) = -1$, ktoré sa nerovnajú).

- Ak funkcia f má deriváciu $f'(x_0)$ v bode x_0, tak

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + h \cdot \tau(h)$$

  pričom $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = 0$.

  Pre dostatočne malé h možno písať $f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$; pre odhad vzniknutej chyby $R = [f(x_0 + h) - f(x_0)] - f'(x_0) \cdot h$ platí

$$|R| \leq \max_{0<\vartheta<1} \frac{|f''(x_0 + \vartheta h)|}{2} \cdot h^2.$$

- **(Rolleho veta)** Ak f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a má deriváciu na (a, b), pričom $f(a) = f(b)$, tak existuje $c \in (a, b)$ také, že $f'(c) = 0$.
- **(Lagrangeova veta o strednej hodnote)** Ak f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a má deriváciu na (a, b), tak existuje $c \in (a, b)$ také, že $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Zoznam derivácií elementárnych funkcií

- $(\alpha)' = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$
- $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
- $(\alpha^x)' = \alpha^x \cdot \ln \alpha,\ \alpha > 0$
- $(\log_\alpha x)' = \dfrac{1}{x \ln \alpha},\ \alpha > 0, \alpha \neq 1$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

l'Hospitalovo pravidlo

Nech $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ alebo $\lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$ a nech existuje $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Potom existuje aj $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Toto tvrdenie platí aj keď $x \to x_0$ zameníme $x \to x_0+,\ x \to x_0-,\ x \to +\infty,\ x \to -\infty$.

Ak niektorý z predpokladov nie je splnený, tak l'Hospitalovo pravidlo použiť **nemožno** !

Príklad: Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

Riešenie: Uvedená limita je zrejme typu $\frac{0}{0}$, takže pokúsime sa použiť l'Hospitalovo pravidlo: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} \overset{l'Hosp.}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\operatorname{tg} x - x)'}{(x - \sin x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} =$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x(1 - \cos x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = \dfrac{1+1}{1^2} = 2.$

Príklad: Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)},\ b \neq 0.$

Riešenie: Uvedená limita je zrejme typu $\frac{0}{0}$, takže pokúsime sa použiť l'Hospitalovo pravidlo: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} \overset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\ln(\cos ax))'}{(\ln(\cos bx))'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\cos ax} \cdot (-a \cdot \sin ax)}{\frac{1}{\cos bx} \cdot (-b \cdot \sin bx)}$ $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-a \cdot \operatorname{tg} ax}{-b \cdot \operatorname{tg} bx} = \dfrac{a}{b} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} ax}{\operatorname{tg} bx} = \dfrac{a}{b} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a \cdot \frac{\operatorname{tg} ax}{ax}}{b \cdot \frac{\operatorname{tg} bx}{bx}} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} ax}{ax}}{b \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} bx}{bx}} = \dfrac{a^2}{b^2}.$

Príklad: Vypočítajte $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+} (1 - \sin x) \operatorname{tg} x.$

Riešenie: Výraz za znakom limity prepíšeme vhodným spôsobom na podiel dvoch výrazov tak, že budeme môcť použiť l'Hospitalovo pravidlo: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+} (1 - \sin x) \operatorname{tg} x = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+} \dfrac{1 - \sin x}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} \overset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+} \dfrac{-\cos x}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+} \cos x \cdot \sin^2 x =$ $0 \cdot 1^2 = 0.$

Príklad: Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{2\ln x} - \dfrac{1}{x^2 - 1} \right).$

Riešenie: Výraz za znakom limity prepíšeme vhodným spôsobom na podiel dvoch výrazov tak, že budeme môcť použiť l'Hospitalovo pravidlo: $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{2\ln x} - \dfrac{1}{x^2 - 1} \right) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1 - 2\ln x}{2\ln x(x^2 - 1)} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1 - 2\ln x}{\ln x(x^2 - 1)} \overset{l'H.}{=}$ $\dfrac{1}{2} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x - \frac{2}{x}}{\frac{1}{x}(x^2 - 1) + 2x\ln x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x} + 2x\ln x} \overset{l'H.}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2} + 2\ln x + 2x\frac{1}{x}}$

$$= \frac{1+1}{1+1+2\cdot 0+2\cdot 1\cdot \frac{1}{1}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Príklad: Vypočítajte $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x}$.

Riešenie: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} e^{\ln\left((\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x}\right)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} e^{\operatorname{cotg} x\cdot\ln\operatorname{tg} x} =$
$e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\operatorname{cotg} x\cdot\ln\operatorname{tg} x} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\ln\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x}} \overset{l'H.}{=} e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\operatorname{cotg} x} = e^0 = 1.$