Priebeh funkcie $f: \; y = \frac{x}{x^2+1}$

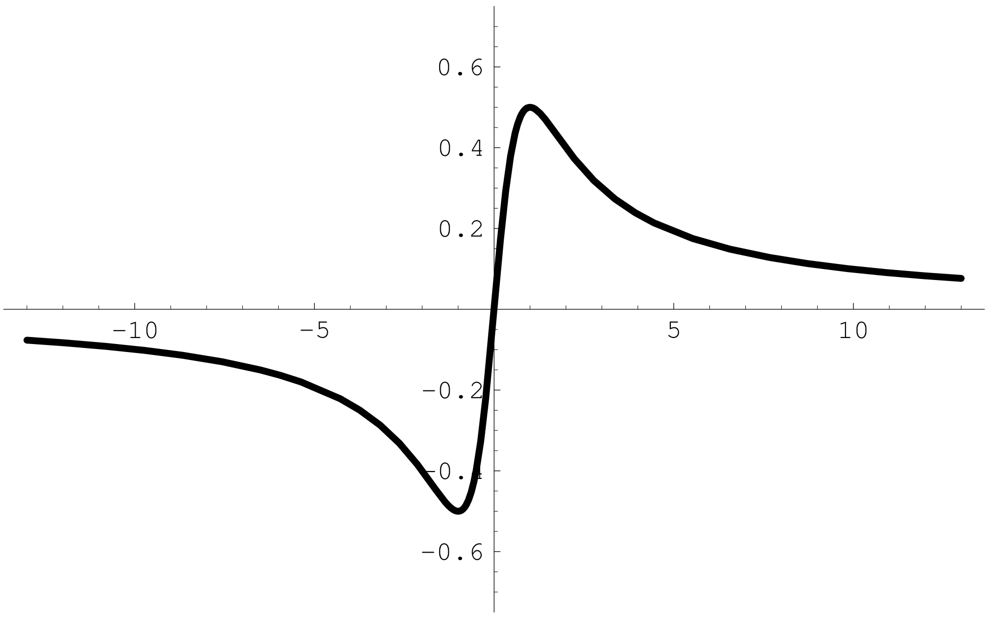
1. **Definičný obor :** $x^2 + 1 > 0$ pre všetky $x \in \mathbf{R}$, preto $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}$.
2. **Párnosť vs. nepárnosť :** definičný obor je množina, ktorá je symetrická vzhľadom na bod 0; platí $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x)$, f je teda nepárna funkcia.
3. **Nulové body :** $f(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{x}{x^2+1} = 0 \Longleftrightarrow x = 0$; f má teda jeden nulový bod $x = 0$.
4. **Priesečníky grafu s osou y :** je $f(0) = 0$, teda graf f pretína os y v bode $[0, 0]$.
5. **Prvá derivácia :** $f'(x) = \frac{(x)' \cdot (x^2+1) - x \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.
6. **Druhá derivácia :** $f''(x) = (\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2})' = \frac{(1-x^2)' \cdot (x^2+1)^2 - (1-x^2) \cdot ((x^2+1)^2)'}{(x^2+1)^4} = \frac{(-2x)\cdot(x^2+1)^2 - (1-x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot(2x)}{(x^2+1)^4} = \frac{(-2x)\cdot(x^2+1) - 4x\cdot(1-x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{2x\cdot(-x^2-1-2+2x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$.
7. **Stacionárne body :** $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Longleftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 1$. Teda f má dva stacionárne body: $x = 1, \; x = -1$.
8. **Rastúcosť a klesajúcosť :** $f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} > 0 \Longleftrightarrow 1 - x^2 > 0 \Longleftrightarrow x^2 < 1 \Longleftrightarrow |x| < 1$. Teda f je rastúca na $(-1, 1)$, klesajúca na $(-\infty, -1), \; (1, \infty)$.
9. **Extrémy :** v $x = 1$ nastáva lokálne maximum, v $x = -1$ lokálne minimum.
10. **Inflexné body :** $f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0 \Longleftrightarrow 2x(x^2 - 3) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \; \vee x = \pm\sqrt{3}$. Teda inflexné body sú $x = 0, \; x = \sqrt{3}, \; x = -\sqrt{3}$.
11. **Konvexnosť a konkávnosť :** $f''(x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} > 0 \Longleftrightarrow 2x(x^2 - 3) > 0 \Longleftrightarrow (x > 0 \wedge x^2 - 3 > 0) \vee (x < 0 \wedge x^2 - 3 < 0) \Longleftrightarrow (x > 0 \wedge |x| > \sqrt{3}) \vee (x < 0 \wedge |x| < \sqrt{3}$. f je teda konvexná na $(-\sqrt{3}, 0), \; (\sqrt{3}, \infty)$, konkávna na $(-\infty, -\sqrt{3}), \; (0, \sqrt{3})$.
12. **Asymptoty bez smernice :** neexistujú (f je spojitá na celom $\mathcal{D}(f)$).

13. **Asymptoty so smernicou :** $k_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x(x^2+1)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$, $\quad q_1 = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{x^2+1} - 0) = 0$. Podobne $k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x(x^2+1)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$, $\quad q_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{x}{x^2+1} - 0) = 0$. Teda rovnica asymptoty so smernicou je $y = 0$.

14. **Tabuľka :**

$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},\infty)$
$\searrow$		$\searrow$	min.	$\nearrow$		$\nearrow$	max.	$\searrow$		$\searrow$
$\cap$	i.b.	$\cup$		$\cup$	i.b.	$\cap$		$\cap$	i.b.	$\cup$

15. **Graf:**



Priebeh funkcie $f: y = e^{\frac{1}{x}}$

1. **Definičný obor :** $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R} - \{0\}$.

2. **Párnosť vs. nepárnosť :** definičný obor je množina, ktorá je symetrická vzhľadom na bod 0; platí $f(-x) = e^{\frac{1}{-x}} \neq \pm f(x)$, f teda nie je ani párna, ani nepárna.

3. **Nulové body :** f nemá nulové body (pre $x \neq 0$ je vždy $e^{\frac{1}{x}} > 0$).

4. **Priesečníky grafu s osou y :** neexistujú (nemožno určiť $f(0)$).

5. **Prvá derivácia :** $f'(x) = (e^{\frac{1}{x}})' = e^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2})$.

6. **Druhá derivácia :** $f''(x) = (e^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2}))' = e^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2}) \cdot (-\frac{1}{x^2}) + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{2}{x^3} = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1+2x}{x^4}$.

7. **Stacionárne body :** neexistujú (je vždy $f(x) \neq 0$ pre $x \neq 0$).

8. **Rastúcosť a klesajúcosť :** pre všetky $x \neq 0$ je $e^{\frac{1}{x}} > 0$, $-\frac{1}{x^2} < 0$, teda $f'(x) < 0$, preto f je klesajúca na $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$.

9. **Extrémy :** nie sú

10. **Inflexné body :** $f''(x) = 0 \Longleftrightarrow e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1+2x}{x^4} = 0 \Longleftrightarrow 1 + 2x = 0 \Longleftrightarrow x = -\frac{1}{2}$. f má teda jeden inflexný bod $x = -\frac{1}{2}$.

11. **Konvexnosť a konkávnosť :** $f''(x) > 0 \Longleftrightarrow e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1+2x}{x^4} > 0 \Longleftrightarrow 1 + 2x > 0 \Longleftrightarrow x > -\frac{1}{2}$. f je teda konvexná na $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(0, \infty)$, konkávna na $(-\infty, -\frac{1}{2})$.

12. **Asymptoty bez smernice :** do úvahy prichádza bod $x = 0$. Je $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \Big/ \frac{1}{x} = y, x \to 0^+ \Longrightarrow y \to +\infty \Big/ = \lim\limits_{y \to +\infty} e^y = +\infty$ a $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \Big/ \frac{1}{x} = y, x \to 0^- \Longrightarrow y \to -\infty \Big/ = \lim\limits_{y \to -\infty} e^y = 0$. Teda rovnica asymptoty bez smernice je $x = 0$.

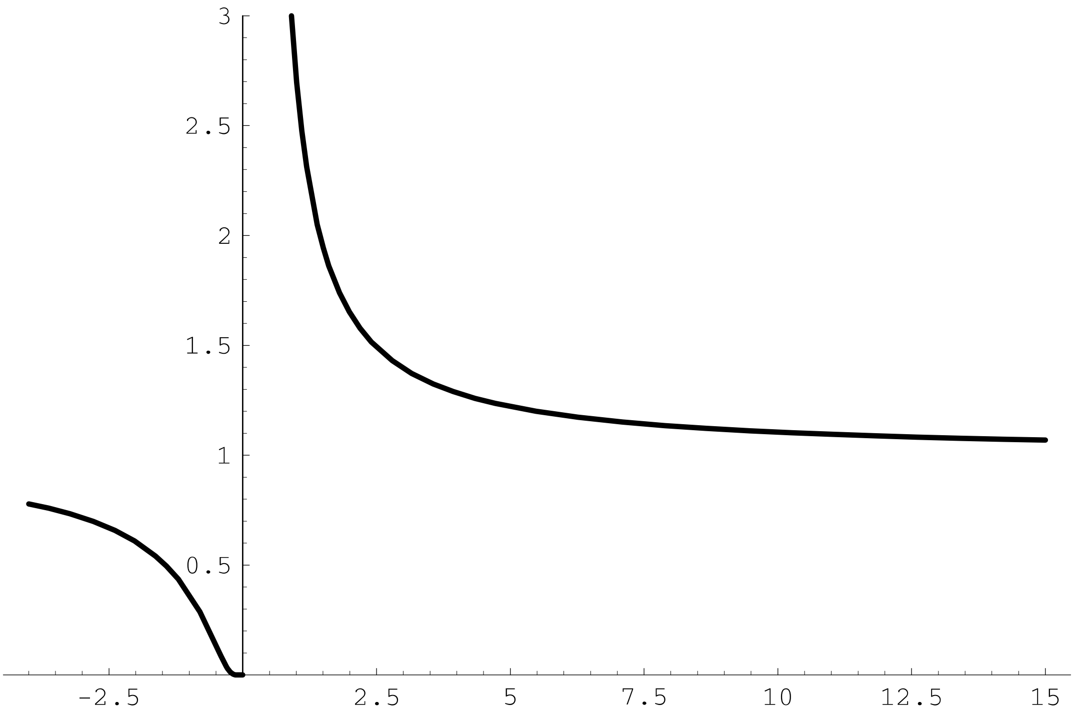
13. **Asymptoty so smernicou :** $k_1 = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \Big/ \frac{1}{x} = y, x \to \infty \Longrightarrow y \to 0^+ \Big/ = \lim\limits_{y \to 0^+} \frac{e^y}{\frac{1}{y}} = \lim\limits_{y \to 0^+} y e^y = 0$, $q_1 = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1$. Podobne $k_2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \Big/ \frac{1}{x} = y, x \to -\infty \Longrightarrow y \to 0^- \Big/ = \lim\limits_{y\to 0^-} \frac{e^y}{\frac{1}{y}} = \lim\limits_{y\to 0^-} y e^y = 0$, $q_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1$. Teda rovnica asymptoty so smernicou je $y = 1$.

14. **Tabuľka :**

$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	0	$(0, \infty)$
$\searrow$		$\searrow$	ABS	$\searrow$
$\cap$	i.b.	$\cup$		$\cup$

15. **Graf:**



Priebeh funkcie $f: \ y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

1. **Definičný obor :** $\sqrt[3]{x^2 - 1}$ je definovaná pre všetky $x \in \mathbf{R}$, preto $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}$.

2. **Párnosť vs. nepárnosť :** definičný obor je množina, ktorá je symetrická vzhľadom na bod 0; platí $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^2 - 1} = \sqrt[3]{x^2 - 1} = f(x)$, f je teda párna funkcia.

3. **Nulové body :** $f(x) = 0 \Longleftrightarrow \sqrt[3]{x^2 - 1} = 0 \Longleftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 1$; f má teda dva nulové body $x = 1, x = -1$.

4. **Priesečníky grafu s osou y :** je $f(0) = \sqrt[3]{0 - 1} = -1$, teda graf f pretína os y v bode $[0, -1]$.

5. **Prvá derivácia :** $f'(x) = ((x^2-1)^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2)' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$.

6. **Druhá derivácia :** $f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{(x)' \cdot \sqrt[3]{(x^2-1)^2} - x \cdot (\sqrt[3]{(x^2-1)^2})'}{(\sqrt[3]{(x^2-1)^2})^2} =$ $\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} - x \cdot \frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} - \cdot \frac{4}{3}x^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2 - 1 - \cdot \frac{4}{3}x^2}{\sqrt[3]{(x^2-1)^5}} =$ $\frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{x^2}{3} - 1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^5}} = -\frac{2}{9} \cdot \frac{x^2+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^5}}$.

7. **Stacionárne body :** $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \Longleftrightarrow x = 0$. Teda f má jeden stacionárny bod $x = 0$.

8. **Rastúcosť a klesajúcosť :** $f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} > 0 \Longleftrightarrow x > 0$ (lebo pre všetky x okrem $x = \pm 1$ je $(x^2-1)^2 > 0$, teda aj $\sqrt[3]{(x^2-1)^2} > 0$). Teda f je rastúca na $(0, 1), (1, \infty)$, klesajúca na $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$.

9. **Extrémy :** v stacionárnom bode $x = 0$ nastáva lokálne minimum. Existujú ešte dva body, v ktorých $f'(x)$ nie je definovaná ($x = 1, x = -1$), v bode -1 je však funkcia f klesajúca a v bode 1 rastúca. Teda f má jediný extrém.

10. **Inflexné body :** $f''(x) = 0 \Longleftrightarrow -\frac{2}{9} \cdot \frac{x^2+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^5}} = 0 \Longleftrightarrow x^2 + 3 = 0$. Táto rovnica nemá riešenie, teda neexistujú také inflexné body, v

ktorých $f''(x) = 0$. Existujú však body $(x = 1, x = -1)$, v ktorých druhá derivácia nie je definovaná. V ľavom a pravom okolí týchto bodoch (pozri výpočet konvexnosti a konkávnosti) má však mení druhá derivácia rôzne znamienko, teda body $x = 1, x = -1$ sú inflexné.

11. **Konvexnosť a konkávnosť :** $f''(x) > 0 \iff -\frac{2}{9} \cdot \frac{x^2+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^5}} > 0 \iff \sqrt[3]{(x^2-1)^5} < 0$ ($x^2 + 3 > 0$ pre všetky $x \in \mathbf{R}$) $\iff x^2 - 1 < 0 \iff x^2 < 1 \iff |x| < 1$. f je teda konvexná na $(-1, 1)$, konkávna na $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$.

12. **Asymptoty bez smernice :** neexistujú (f je spojitá na celom $\mathcal{D}(f)$).

13. **Asymptoty so smernicou :** $k_1 = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^3}} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^3}} = 0$, $q_1 = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^2-1} - 0) = +\infty$. Tieto limity sa nezmenia, ak uvažujeme $x \to -\infty$. Teda asymptoty so smernicou neexistujú.

14. **Tabuľka :**

$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
$\searrow$		$\searrow$	min.	$\nearrow$		$\nearrow$
$\cap$	i.b.	$\cup$		$\cup$	i.b.	$\cap$

15. **Graf:**