Číselné obory, operácie

- $\mathbb{N}$ … množina prirodzených čísel (aj s 0)
- $\mathbb{Z}$ … množina celých čísel
- $\mathbb{Q}$ … množina racionálnych čísel
- $\mathbb{R}$ … množina reálnych čísel
- rozšírené označenie súčtov

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \cdots + a_n$$

$$\sum_{i \in I} a_i = a_{i_1} + \cdots + a_{i_n},\ I = \{i_1, \cdots, i_n\}$$

- rozšírené označenie súčinov

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1\, a_2 \cdots a_n$$

$$\prod_{i \in I} a_i = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n},\ I = \{i_1, \cdots, i_n\}$$

Množiny

- množina – súbor objektov (prvkov)
- spôsob zadania množiny
  - vymenovaním prvkov

    $S = \{2,3,5,7\}$
  - charakteristickou vlastnosťou

    $S = \{n\text{: } n \text{ je prvočíslo menšie ako } 10\}$

    ! Nie každá výroková funkcia môže byť charakteristickou vlastnosťou, napr.

$$x \in M \Leftrightarrow x \notin x$$

$$\Downarrow$$

$$M \in M \Leftrightarrow M \notin M \quad ???$$

- $n \in S$ … prvok n patrí do množiny S
- $n \notin S$ … prvok n nepatrí do množiny S
- $S \subseteq T$ … množina S je podmnožinou množiny T

$$S \subseteq T \Leftrightarrow (\forall n)\, n \in S \Rightarrow n \in T$$

- $S = T$ ... množiny S, T sa rovnajú

$$S = T \Leftrightarrow S \subseteq T \wedge T \subseteq S$$

- $\emptyset$ ... prázdna množina (neobsahuje žiaden prvok)

$$! \;\; \emptyset \neq \{\emptyset\}$$

- $S \cup T$ ... zjednotenie množín S, T

$$S \cup T = \{x\colon\; x \in S \vee x \in T\}$$

- $S \cap T$ ... prienik množín S, T

$$S \cap T = \{x\colon\; x \in S \wedge x \in T\}$$

- $S \setminus T$ ... rozdiel množín S, T

$$S \setminus T = \{x\colon\; x \in S \wedge x \notin T\}$$

- rozšírené označenie množinových operácií

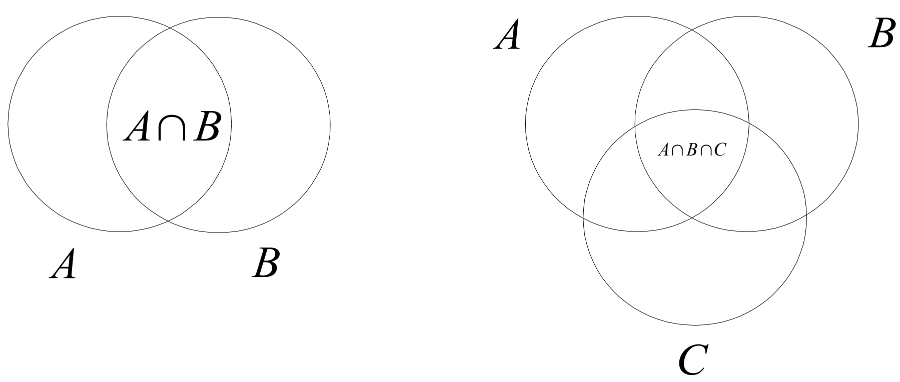
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup \cdots \cup A_n$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n},\ I = \{i_1, \cdots, i_n\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap \cdots \cap A_n$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n},\ I = \{i_1, \cdots, i_n\}$$

- $|S|$ … mohutnosť množiny S
  - pre konečné množiny je $|S|$ rovné počtu prvkov S
- $\mathcal{P}(X)$, 2^X … množina všetkých podmnožín X
- $\bar{X}$ … komplement množiny X
  $= Y \setminus X,\ X \in \mathcal{P}(Y)$
- znázorňovanie množín a ich vzájomných vzťahov
  - Vennove diagramy



Veta:

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cap A = A$$
$$A \cup A = A$$
$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$
$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$$
$$B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \Leftrightarrow A = \emptyset$$

- $\{x,y\}$ … neusporiadaná dvojica prvkov x, y
- $[x,y]$ … usporiadaná dvojica prvkov x, y

$$[x,y] = \{\{x\},\{x,y\}\}$$

$$[x,y] = [u,v] \Leftrightarrow x = u \wedge y = v$$

- $[x_1,\dots,x_n]$ … usporiadaná n-tica prvkov $x_1,\dots, x_n$
- $S \times T$ … karteziánsky súčin množín S, T

$$S \times T = \{[x,y]: x \in S, y \in T\}$$

- $S_1 \times \cdots \times S_n$ … karteziánsky súčin množín $S_1,\dots, S_n$

$$S_1 \times \cdots \times S_n = (S_1 \times \cdots \times S_{n-1}) \times S_n$$

- S^n … karteziánska mocnina množiny S

$$S^n = \underbrace{S \times S \times \cdots \times S}_{n\text{-krát}}$$

Veta:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$$

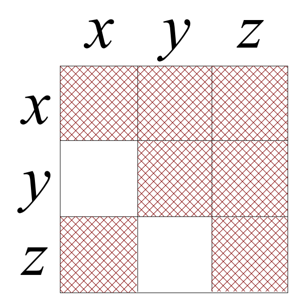
$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$$

Relácie

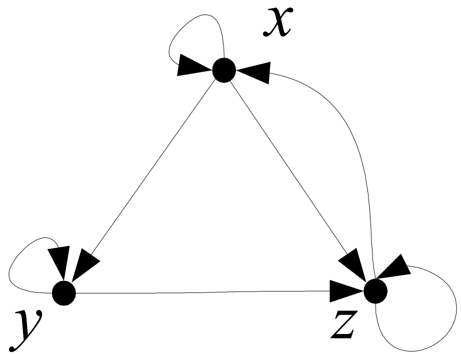
- množina R je n-árna relácia, ak existujú množiny $X_1, \dots, X_n$ také, že $R \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$. n je arita relácie.
- ak $n = 1$, tak $R \subseteq X$ je unárna relácia (vyjadruje určitú vlastnosť prvkov množiny X)
- ak $n = 2$, tak $R \subseteq X \times Y$ je binárna relácia (vyjadruje určitý vzťah medzi dvojicami prvkov množín X a Y)
- v definícii možno predpokladať $R \subseteq X^n$ (ak vezmeme $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$)

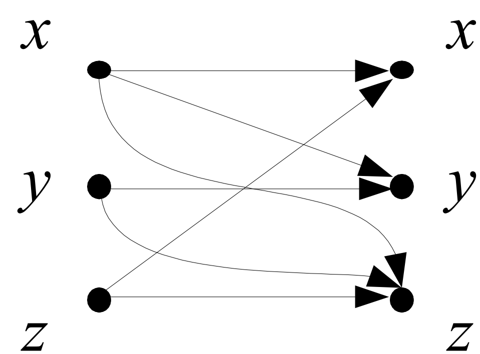
- znázorňovanie binárnych relácií
  - pomocou štvorcovej schémy

$X = \{x, y, z\}$
$R = \{[x, x], [x, y], [x, z],$
$[y, y], [y, z], [z, x],$
$[z, z]\}$



  - pomocou diagramu

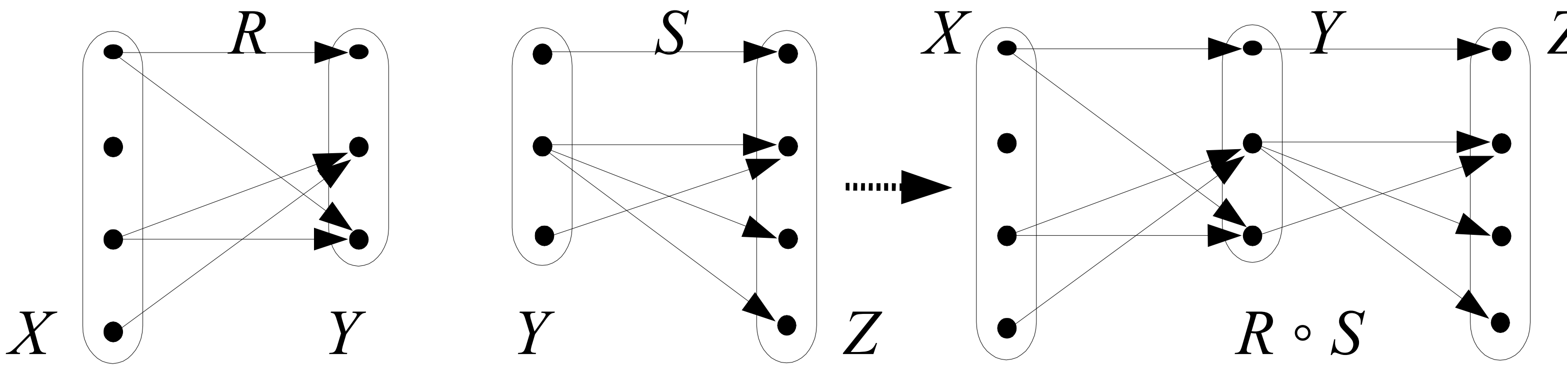




- $R \circ S$ … kompozícia (zloženie) relácií $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$

$$R \circ S = \{[x,y] \in X \times Z: (\exists z \in Y)\ [x,z] \in R \wedge [z,y] \in S\}$$

! $R \circ S \neq S \circ R$



- R^{-1} … inverzná relácia k relácii $R \subseteq X \times Y$

$$R^{-1} = \{[y,x] \in Y \times X: [x,y] \in R\}$$

Veta: Nech $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$, $T \subseteq Z \times U$ sú relácie.

(i) $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

(ii) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

(iii) $(R^{-1})^{-1} = R$

- binárna relácia R na množine X sa nazýva
  - reflexívna, ak
    $$(\forall\, x \in X)\ [x, x] \in R$$
  - symetrická, ak
    $$(\forall\, x, y \in X)\ [x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R$$
  - tranzitívna, ak
    $$(\forall\, x, y, z \in X)\ [x, y] \in R \wedge [y, z] \in R \Rightarrow [x, y] \in R$$
  - antisymetrická, ak
    $$(\forall\, x, y \in X)\ [x, y] \in R \wedge [y, x] \in R \Rightarrow x = y$$
- relácia, ktorá je reflexívna, symetrická a tranzitívna, sa nazýva relácia ekvivalencie
- relácia, ktorá je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna, sa nazýva čiastočné usporiadanie

- $R[x]$ … trieda ekvivalencie R určená prvkom x

$$R[x] = \{y: [x,y] \in R\}$$

Veta: Pre každú ekvivalenciu R na množine X platí:

(i) $(\forall x \in X)\ R[x] \neq \emptyset$

(ii) $(\forall x,y \in X)\ R[x] = R[y] \vee R[x] \cap R[y] = \emptyset$

(iii) triedy ekvivalencie jednoznačne popisujú reláciu R

- každá ekvivalencia určuje rozklad množiny na navzájom disjunktné podmnožiny a naopak

Zobrazenia

- relácia $f \subseteq X \times Y$ je zobrazenie z množiny X do množiny Y, ak

$$(\forall x \in X)(\forall y_1, y_2 \in Y)\ ([x, y_1] \in f \wedge [x, y_2] \in f) \Rightarrow y_1 = y_2$$

- $\mathcal{D}(f)$ … definičný obor zobrazenia f

$$\mathcal{D}(f) = \{x \in X: (\exists y \in Y)\ [x, y] \in f\}$$

- $\mathcal{H}(f)$ … obor hodnôt zobrazenia f

$$\mathcal{H}(f) = \{y \in Y: (\exists x \in X)\ [x, y] \in f\}$$

- $f: X \rightarrow Y$ … zobrazenie množiny X do Y; platí $\mathcal{D}(f) = X$
- $f(x)$ … obraz prvku x v zobrazení f

$$f(x) = y \Leftrightarrow y \in Y \wedge [x, y] \in f$$

- id_X ... identické zobrazenie X do X

$$(\forall x \in X)\ id_X(x) = x$$

- $f \circ g$ … zložené zobrazenie z $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$

$$\mathcal{D}(f \circ g) = \{x \in \mathcal{D}(f)\colon f(x) \in \mathcal{D}(g)\}$$

$$(f \circ g)(x) = g(f(x))$$

- f^{-1} … inverzné zobrazenie k zobrazeniu $f\colon X \to Y$

$$f^{-1}\colon Y \to X, \qquad f \circ f^{-1} = id_X$$

$$f^{-1} \circ f = id_Y$$

- zobrazenie $f\colon X \to Y$ sa nazýva
    - prosté (injektívne), ak $(\forall\, x_1, x_2 \in X)\; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
    - na (surjektívne), ak $\mathcal{H}(f) = Y$
    - vzájomne jednoznačné (bijektívne), ak je prosté aj na

- označenie - $f\colon X \xrightarrow{1-1} Y$ pre prosté zobrazenie, $f\colon X \xrightarrow{na} Y$ pre zobrazenie na, $f\colon X \xrightarrow[na]{1-1} Y$ pre vzájomne jednoznačné zobrazenie

Veta: Nech f: $X \to Y$ a g: $Y \to Z$ sú zobrazenia.

(i) Ak f, g sú prosté, tak aj $f \circ g$ je prosté.

(ii) Ak f, g sú na, tak aj $f \circ g$ je na.

(iii) Ak f, g sú vzájomne jednoznačné, tak aj $f \circ g$ je vzájomne jednoznačné.

(iv) Existuje množina W, prosté zobrazenie $\varphi : W \to Z$ a zobrazenie na $\psi : X \to W$ také, že $f = \psi \circ \varphi$.