

Princíp matematickej indukcie

- množina $\mathbb{N}$ prirodzených čísel je podmnožina $\mathbb{R}$, spĺňajúca
- (i) $0 \in \mathbb{N}$
 - (ii) $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x + 1 \in \mathbb{N}$
 - (iii) $(\forall X \subseteq \mathbb{R}) (0 \in X \wedge (x \in X \Rightarrow x + 1 \in X)) \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq X$

Veta (princíp matematickej indukcie): Nech $V(x)$ je výroková funkcia definovaná na $\mathbb{N}$. Ak je splnené

- (I) platí $V(0)$
- (II) $(\forall k \in \mathbb{N}) V(k) \Rightarrow V(k+1)$

tak $V(x)$ platí pre všetky $x \in \mathbb{N}$.

- modifikácia:

$$(II') \quad (\forall k \geq k_0) V(k) \Rightarrow V(k+1)$$

Potom $V(k)$ platí pre všetky $k \geq k_0$.

Príklad: Dokážte, že $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Dôkaz: (1) tvrdenie platí pre $n = 1$: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

(2) nech tvrdenie platí pre $n = k$, t.j. nech $1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Pre $n = k + 1$ dostávame

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + (k+1) &= (1 + 2 + \dots + k) + (k+1) = \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Tvrdenie teda platí aj pre $n = k + 1$.

Veta (princíp úplnej indukcie): Nech $V(x)$ je výroková funkcia definovaná na $\mathbb{N}$. Ak je splnené

$$(I') \quad ((\forall k < n) V(k)) \Rightarrow V(n)$$

tak $V(x)$ platí pre všetky $x \in \mathbb{N}$.

Príklad: Dokážte, že n priamok delí rovinu na $\leq \frac{k^2 + k + 2}{2}$ častí.

Dôkaz: (1) výrok platí pre $k = 1$ (priamka delí rovinu na 2 časti)

(2) nech výrok platí pre $< k$ priamok. Majme k priamok; odoberme jednu z nich. Zvyšných $k - 1$ priamok delí rovinu na $\leq \frac{(k-1)^2 + (k-1) + 2}{2} = \frac{k^2 - k + 2}{2}$ častí.

Pridaním odobratej priamky späť vznikne najviac k nových častí (lebo pretína najviac $k - 1$ priamok), čo spolu dáva $\leq \frac{(k-1)^2 + (k-1) + 2}{2} + k = \frac{k^2 + k + 2}{2}$ častí.

Dirichletov princíp

Veta (Dirichletov princíp): Nech $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ sú konečné množiny a $n > m$. Potom neexistuje žiadne prosté zobrazenie $f: X \xrightarrow{1-1} Y$.

- interpretácia: ak je n objektov rozdelených do $< n$ skupín, tak aspoň jedna skupina obsahuje aspoň dva objekty
- modifikácia: ak je $m \cdot n$ objektov rozdelených do $< n$ skupín, tak aspoň jedna skupina obsahuje aspoň $m + 1$ objektov

Príklad: Dokážte, že spomedzi n celých čísel možno vždy vybrať niekoľko tak, že ich súčet je deliteľný n .

Dôkaz: nech uvažované čísla sú $a_1, a_2, \dots, a_n$. Uvažujme súčty $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Ak niektorý z nich je deliteľný n , tak tvrdenie platí. Inak sú zvyšky po ich delení číslom n z množiny $\{1, 2, \dots, n - 1\}$. Z toho vyplýva, že existujú dva súčty $a_1 + \dots + a_i, a_1 + \dots + a_j$, ktoré po delení n dávajú rovnaký zvyšok; BUNV nech $j > i$. Potom rozdiel $a_1 + \dots + a_j - (a_1 + \dots + a_i) = a_{i+1} + \dots + a_j$ je deliteľný n , teda podmienkam úlohy vyhovuje súčet čísel a_{i+1} až a_j .