

Základy kombinatorického počítania

- konfigurácie - objekty skúmané pri riešení kombinatorických úloh
- typy kombinatorických úloh
 - zostrojenie konfigurácií zadaných vlastností
 - dôkaz existencie/neexistencie určitej konfigurácie **bez** jej skonštruovania
 - charakterizácia existujúcich konfigurácií pomocou iných pojmov a vlastností
 - určenie počtu všetkých konfigurácií daných vlastností
 - určenie algoritmu na zostrojenie všetkých konfigurácií
 - výber konfigurácií optimálnych vzhľadom na zvolené kritériá

- základná (bázová) množina - množina, z ktorej prvkov sú utvárané konfigurácie

Príklad: Z 10-člennej ústrednej rady politickej strany treba vybrať 4-člennú delegáciu tak, aby v nej neboli konkrétni dvaja politici. Koľkými spôsobmi ju možno zostaviť?

- základná množina je $X = \{x_1, \dots, x_{10}\}$, kde x_1 a x_2 sú politici, ktorí nemajú byť v delegácii
- konfigurácia je 4-prvková podmnožina $Y \subset X$ taká, že $\{x_1, x_2\} \not\subset Y$
- ak miesto delegácie máme vybrať 4-členné predsedníctvo bez daných dvoch politikov, tak konfigurácia je usporiadaná štvorica prvkov z X neobsahujúca x_1 ani x_2

Príklad: Na zábavu prišlo 12 dievčat a 15 chlapcov. Koľkými spôsobmi z nich možno utvoriť 4 tanečné páry?

- základná množina je $D \cup C$, kde D je množina dievčat a C je množina chlapcov
 - konfigurácie sú štvorprvkové podmnožiny karteziánskeho súčinu $D \times C$ také, že ich prvky (usporiadané dvojice) sú tvorené navzájom rôznymi prvkami D resp. C
 - metóda vymenovania všetkých konfigurácií
 - systematické vymenovanie a popísanie všetkých navzájom rôznych konfigurácií, ktoré vyhovujú podmienkam úlohy
 - počítanie (očíslovanie) týchto konfigurácií
- ! treba vymenovať všetky konfigurácie a žiadnu z nich nezarátat' viackrát**

Veta (pravidlo súčtu): Nech $Y_1, \dots, Y_k$, $k \geq 2$ sú navzájom disjunktné podmnožiny konečnej množiny Y také, že $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_k$. Potom $|Y| = |Y_1| + \dots + |Y_k|$.

Príklad: Kol'kokrát za deň tvoria cifry na displeji 6-miestnych digitálnych hodín rastúcu postupnosť?

- konfigurácie sú šestice $[x_1, \dots, x_6]$, kde x_1x_2 je dvojčísle hodín (00 ... 23), x_3x_4 je dvojčísle minút a x_5x_6 dvojčísle sekúnd (00 ... 59). Ak postupnosť má byť rastúca, nutne musí byť $x_5 = 4$ alebo $x_5 = 5$. V prvom prípade je 5 možností (01:23:45 - 01:23:49), v druhom 5·4 možností (5 pre štvoricu $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ a nezávisle od toho 4 pre x_6), spolu teda **25**.

Veta (pravidlo súčinu): Nech $Y_1, \dots, Y_k$, $k \geq 2$ sú konečné množiny. Potom $|Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_k| = |Y_1| \cdot |Y_2| \cdot \dots \cdot |Y_k|$.

Príklad: Koľko 4-ciferných čísel deliteľných 5 možno zostaviť z cifier 0, 2, 4, 5, 8 (cifry sa môžu opakovať) ?

- nech $X = \{0, 2, 4, 5, 8\}$ a nech Y je množina všetkých 4-ciferných čísel vyhovujúcich podmienkam úlohy. Potom $Y = \{X \setminus \{0\}\} \times X \times X \times \{0, 5\}$, teda $|Y| = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 = \mathbf{200}$.

Veta (zovšeobecnené pravidlo súčinu):

Nech $S = \{[s_1, \dots, s_k] : s_i \in X\} \subseteq X^k$, $k \geq 2$, spĺňajúca podmienky:

- (1) prvok s_1 možno z množiny X vybrať n_1 spôsobmi,
- (2) po akomkoľvek výbere prvku s_1 je možné prvok s_2 vybrať n_2 spôsobmi,
- $\vdots$
- (k) po akomkoľvek výbere usporiadanej ($k - 1$)-tice $[s_1, \dots, s_{k-1}]$ je možné prvok s_k vybrať n_k spôsobmi.

Potom $|S| = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Príklad: Koľko je 5-ciferných čísel, ktorých cifry sú navzájom rôzne?

- cifru najvyššieho rádu možno vybrať z 9 cifier (všetky okrem 0), cifru druhého najvyššieho rádu z 9 cifier (vyberáme z 10 cifier, ale musí byť rôzna od prvej vybratej), cifru tretieho najvyššieho rádu z 8 cifier (musí byť rôzna od prvých dvoch) atď. Počet daných čísel je potom $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = \mathbf{27216}$.